

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES À FINALITÉ SPÉCIALISÉE EN DATA SCIENCE

Formation du satellite multi-câblé avec les satellites adjoints en mouvement le long des courbes de Lissajous

Henris, Hugo

Award date:
2019

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

Formation du satellite multi-câblé avec les satellites adjoints en mouvement le long des courbes de Lissajous

Promoteur :

Anne LEMAITRE

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master mathématiques à finalité spécialisé en data science**

Hugo HENRIS

Juin 2019

Remerciements

En préambule à mémoire, je souhaite remercier les personnes qui m'ont apporté leur aide, leur soutien et qui ont ainsi contribué, à leur manière, à l'écriture de ce travail de fin d'étude.

Je tiens à remercier tout particulièrement Anne Lemaître, promoteur de ce mémoire, pour l'aide apportée dans la découverte de ce nouveau sujet que ce soit dans la compréhension générale ou encore l'élaboration de calculs fastidieux. Son écoute concernant l'orientation que je voulais prendre pour ce travail m'a permis d'envisager un texte qui s'inscrit dans la branche des mathématiques appliquées qui me plaît le mieux : la dynamique céleste. Ses rapides réponses et sa détermination ont été d'une importance capitale dans l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury d'avoir accepté de juger mon travail et d'avoir consacré du temps à la lecture de celui-ci.

Au terme de mes études, je souhaite adresser mes remerciements au corps professoral et administratif du département de mathématique de l'Université de Namur pour le temps qu'ils nous ont consacré afin de nous offrir une formation riche et de qualité.

Je remercie également tous mes proches et amis qui m'ont toujours encouragé tout au long de mes études. Un grand merci à mes camarades de deuxième master pour leur soutien précieux au cours de ces cinq dernières années.

J'adresse mes plus sincères remerciements à mes parents ainsi qu'à ma sœur qui ont toujours cru en moi et qui m'ont soutenu dans les moments les plus difficiles.

Enfin, je tiens à remercier ma maman, pour son attentive relecture de ce mémoire.

Merci à toutes et à tous.

Résumé

En physique atmosphérique, géodésique de plasma, des mesures multi-points sont nécessaires. Ces mesures simultanées peuvent être effectuées en plaçant les capteurs sur des satellites différents. Dans le but de minimiser la consommation de fuel, il a été imaginé de relier ces satellites adjoints disposant de capteurs à un même satellite (et non entre eux) au moyen de câbles. La possibilité d'enchevêtrement de câbles est évidemment présente, augmentant le risque de collisions et la complexité du déploiement d'un tel système. Ce mémoire a pour but de modéliser théoriquement le mouvement de ces satellites, d'en étudier l'équilibre, la stabilité ainsi que les risques d'enchevêtrement. Une présentation théorique et numérique du mouvement des satellites le long des courbes de Lissajous est également proposée.

Mots-clés : satellites multi-câblé, courbes de Lissajous, mécanique céleste, dynamique céleste, système dynamique

Abstract

In atmospheric physics, plasma geodesics, multi-point measurements are needed. These simultaneous measurements can be performed by placing the sensors on different satellites. In order to minimize the consumption of fuel, it has been imagined to connect these auxiliary satellites with sensors to the same satellite (and not to each other) by means of cables. The possibility of entanglement of cables is obviously present, increasing the risk of collisions and the complexity of the deployment of such a system. This master's thesis aims at theoretically modeling the motion of these satellites, to study the interesting equilibrium, the stability as well as the risks of entanglement. A theoretical and numerical presentation of the dynamics of the satellites along the curves of Lissajous is also proposed.

Key-words : multi-tethered satellite, Lissajous curves, celestial mechanics, celestial dynamics, dynamical system

Table des matières

Introduction	5
1 Modélisation	7
1.1 Calcul des accélérations	8
1.1.1 Accélération relative	10
1.1.2 Accélération de Coriolis	10
1.1.3 Accélération d'entraînement	11
1.2 Calcul des forces	12
1.3 Equations du mouvement du système du satellite multi-câblé en orbite autour de la Terre	17
1.3.1 Modification du centre du repère	18
1.3.2 Modification de l'ordre et du sens des axes	19
1.4 Modèle usuel viscoélastique de la tension	21
1.5 Equilibre du système	22
1.6 Valeur critique du coefficient d'élasticité du câble	25
2 Mouvements autour de l'équilibre	27
2.1 Equation vectorielle de la tension à l'équilibre	28
2.2 Equation vectorielle de la tension générale lors de faibles déplacements des satellites adjoints et du satellite principal	29
2.3 Equations du mouvement des satellites adjoints et du satellite principal lors de faibles déplacements	33
3 Découplage et stabilité	36
3.1 Découplage en trois groupes indépendants	37
3.2 Equation du mouvement du centre de masse du système	38
3.3 Mouvement relatif entre le satellite principal et le centre de masse des satellites adjoints	40
3.3.1 Equations du mouvement	40
3.3.2 Stabilité du mouvement	42

3.4	Mouvement relatif entre les satellites adjoints	46
3.4.1	Equations du mouvement	46
3.4.2	Stabilité du mouvement	48
3.4.3	Fréquence d'oscillation du mouvement en x et z	49
4	Mouvement des satellites adjoints le long les courbes de Lissajous	52
4.1	Courbes de Lissajous	53
4.2	Formations équilibrées évitant les collisions	56
4.2.1	Conditions de formation de satellites adjoints le long des courbes de Lissajous	56
4.2.2	Arrangement uniforme de satellites adjoints : Type I	57
4.2.3	Arrangement uniforme de satellites adjoints : Type II	57
4.2.4	Propriétés des formations de type I et II	57
4.2.5	Simulations numériques	67
4.3	Enchevêtrement des câbles	69
4.4	Théorie de perturbation de second ordre	81
	Bibliographie	91
	A Propriétés de la dynamique d'attitude du satellite "dumbbell"	93
	B Un modèle "masse-ressort" des systèmes de satellites câblés	97
	C Codes Matlab	100

Introduction

Ce travail se penche sur la formation du satellite multi-câblé en trois dimensions avec les satellites adjoints en mouvement le long des courbes de Lissajous. Dans le cadre d'étude en physique atmosphérique, géodésique de plasma, des mesures multi-points sont nécessaires. Encore plus dans le cadre de l'interférométrie spatiale, des mesures simultanées peuvent être effectuées à l'aide d'un ensemble de sondes connectées par des attaches alignées le long de la verticale locale. C'est afin de répondre à ce besoin que les satellites multi-câblés ont été introduits. En effet, c'est parce que les différents capteurs doivent être à des endroits différents et assez éloignés les uns des autres, que l'idée de les placer sur des satellites différents est apparue. Dans le but de minimiser la consommation de fuel, il a été imaginé de relier ces satellites disposant de capteurs à un même satellite dit "corps principal" (et non entre eux) au moyen de câbles. Aussi, cela simplifierait les stratégies de contrôle et atténuerait la nécessité d'une grande quantité de propulseurs actuellement requise par le système de contrôle d'un engin spatial séparé. De plus, le vol de satellites multiples réduit le risque d'échec d'une mission entière si un système ou un instrument tombe en panne. La rotation et la force gravitationnelle ne suffisant pas, les satellites adjoints sont tout de même équipés de moteurs à faible poussée afin de garder les liens tendus entre les satellites. Ils permettent de stabiliser la dynamique souhaitée du système. Ce modèle, comportant un bon nombre d'avantages, présente tout de même certains désavantages, à savoir que les câbles peuvent s'entremêler ou se détendre, augmentant le risque de collisions mais aussi que la complexité pour déployer un tel système de satellites n'est pas des moindres. Cependant, ce système est, en ce moment, en développement pour un décollage attendu d'ici quelques années.

C'est en 1983 que Bekey [3] a, pour la première fois, discuté du satellite multi-câblé en proposant une configuration en double pyramide. A partir de cet article, la dynamique du satellite multi-câblée a été intensivement étudiée. Pour obtenir un tel système, il est nécessaire de déployer plusieurs attaches à partir du satellite principal jusqu'aux extrémités des satellites adjoints. En 2008, Pizarro-Chong et Misra [6] désirent spécifier de manière plus détaillée la dynamique de ce système en introduisant le comportement dit "hub-and-spoke"¹. Ils étudient, tout d'abord, les formations planes appelées "centre et rayon" qui comprennent le corps principal situé au centre de la formation à partir duquel les attaches des câbles (rayons) ont chacune

1. traduction introuvable mais cependant proche de "en étoile"

un satellite adjoint à leur extrémité. Un tel comportement dans différents environnements dynamiques est envisagé pour une orbite circulaire par Avanzini et Fedi [2] en 2014 et pour une orbite elliptique par ces deux mêmes auteurs un an plus tard. Le cas de l'orbite de halo (désignant une trajectoire orbitale périodique qu'un objet céleste parcourt sans propulsion en un point de Lagrange) est proposé par Zhao et Cai [10] en 2008. Enfin, Wong et Misra [8], en 2008, ont étudié l'environnement dynamique proche des points de Lagrange.

Une nouvelle approche d'un système céleste peut être étudiée en détail et sera l'objet de ce travail. Le premier chapitre se penchera, d'une part sur la modélisation du satellite multi-câblé en trois dimensions en suivant l'article "Clohessy, W.H., Wiltshire, R.S., *Terminal guidance system for satellite rendez-vous*" [5], afin d'en déduire les équations du mouvement. Ensuite celles-ci seront appliquées à notre système décrit dans l'article de référence "Yarotsky, D., Sidorenko, V., Pritykin, D., *Three-dimensional multi-tethered satellite formation with the elements moving along Lissajous curves*" [9]. D'autre part, les équilibres de cet ensemble d'objets célestes seront envisagés. Le deuxième chapitre présentera une linéarisation du système modélisé. Le troisième chapitre se penchera sur le découplage et la stabilité du système d'équations du mouvement autour de l'équilibre obtenu dans le deuxième chapitre. Le quatrième chapitre proposera une étude approfondie du mouvement des satellites adjoints le long des courbes de Lissajous. Tout d'abord en décrivant les formations balancées évitant les collisions, ensuite en introduisant la notion d'enchevêtrement des câbles. La notion de perturbation sera aussi brièvement abordée. Les figures présentées dans le cadre de ce mémoire ont été inspirées de celles des articles [5] et [9] et ont été toutes réalisées au moyen du logiciel KEYNOTE dans sa version 7.0.5.

Chapitre 1

Modélisation

Sommaire

1.1	Calcul des accélérations	8
1.1.1	Accélération relative	10
1.1.2	Accélération de Coriolis	10
1.1.3	Accélération d'entraînement	11
1.2	Calcul des forces	12
1.3	Equations du mouvement du système du satellite multi-câblé en orbite autour de la Terre	17
1.3.1	Modification du centre du repère	18
1.3.2	Modification de l'ordre et du sens des axes	19
1.4	Modèle usuel viscoélastique de la tension	21
1.5	Equilibre du système	22
1.6	Valeur critique du coefficient d'élasticité du câble	25

Dans ce premier chapitre, la modélisation complète du système de satellites multi-câblé est détaillée. Plusieurs outils de la mécanique classique peuvent être utilisés. Pour le cas simplifié du système de satellite "dumbbell" composé de deux corps, une approche Lagrangienne est privilégiée (voir Annexe *A* et *B*). Pour le cas du système de satellites multi-câblé, nous partons des équations du mouvement d'une masse en orbite autour de la Terre au moyen de la seconde loi de Newton, décrites dans l'article [5]. Nous généralisons ensuite ces équations au mouvement d'un corps principal relié à N satellites adjoints en orbite autour de la Terre. Nous retrouvons alors les équations du système de satellite multi-câblé décrit dans l'article de référence [9] en appliquant deux modifications : le centre du repère mobile devient le centre de masse du satellite principal et des satellites adjoints et l'ordre des axes ainsi que leur sens sont modifiés. Pour finir, nous détaillons le modèle usuel viscoélastique de la tension totale, nous décrivons et calculons les équilibres du système et établissons une valeur critique pour le câble d'extensibilité reliant les satellites adjoints.

1.1 Calcul des accélérations

Dans cette section, nous détaillons les équations du mouvement d'une masse en orbite autour de la Terre au moyen de la seconde loi de Newton, décrites dans l'article [5]. Soit $R_T^e = \{T, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ le repère inertiel, où T correspond au centre de la Terre. Le plan orbital dans lequel se déplace le satellite principal noté C correspond au plan \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Cette masse est associée à un repère mobile $R_C^f = \{C, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ placé au centre du satellite C et à une distance $\|\vec{r}_C\|$ du point T (voir FIGURE 1.1). Le vecteur noté \vec{r}_C relie le centre de la Terre T au satellite C et est orienté dans la direction de \vec{f}_2 . Remarquons sur la FIGURE 1.1 que le plan \vec{f}_1, \vec{f}_2 correspond au plan \vec{e}_1, \vec{e}_2 , ce qui permet de déduire que

$$\vec{e}_3 = \vec{f}_3.$$

Le demi-grand axe peut également s'exprimer comme $a = \|\vec{r}_C\|$. Le point C se déplace selon une orbite circulaire autour de la Terre, dans la direction opposée à \vec{f}_1 avec une vitesse notée \vec{v}_C et une vitesse angulaire ω_0 . Le vecteur de rotation instantanée du repère R_C^f par rapport au repère R_T^e est alors donné par $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_3 = \omega_0 \vec{f}_3$ où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Gm_T}{\|\vec{r}_C\|^3}}.$$

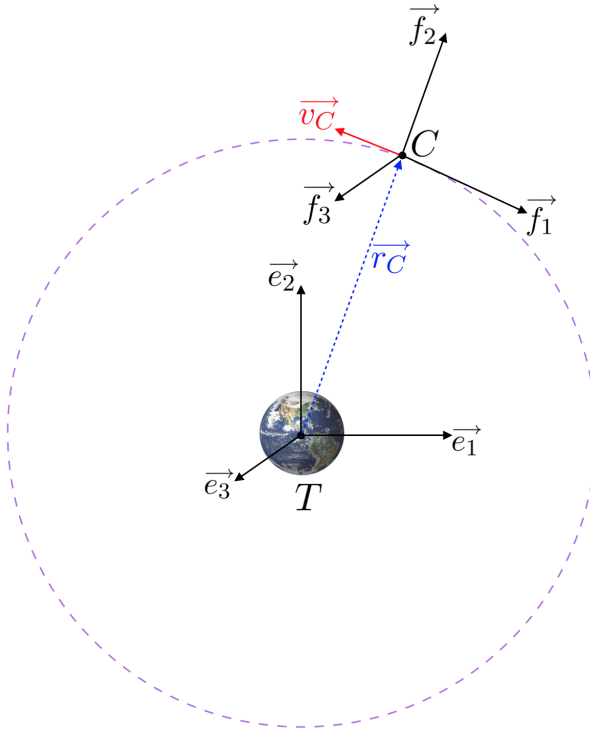


FIGURE 1.1 – Repère fixe et repère mobile du satellite principal C

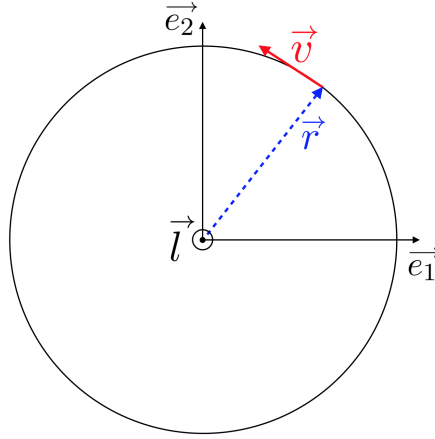


FIGURE 1.2 – Moment cinétique

Le moment cinétique est dans la direction du vecteur \vec{e}_3 . Rappelons que le moment cinétique classique est défini par

$$\vec{l} = m \vec{r} \times \vec{v}, \quad (1.1)$$

le mouvement est représenté par un cercle à la FIGURE 1.2. Les vecteurs position \vec{r} et vitesse \vec{v} peuvent alors être décomposés de la manière suivante

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r [\cos(\omega_0 t) \vec{e}_1 + \sin(\omega_0 t) \vec{e}_2] \\ \vec{v} &= \omega_0 r [-\sin(\omega_0 t) \vec{e}_1 + \cos(\omega_0 t) \vec{e}_2] \end{aligned}$$

où $\omega_0 > 0$ est la vitesse angulaire et \vec{r} est le vecteur position de norme r . Nous obtenons alors que le moment cinétique est donné par

$$\begin{aligned} \vec{l} &= m \vec{r} \times \vec{v} \\ &= m \underbrace{\omega_0 r}_{>0} \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Il en ressort alors que \vec{l} est dans la direction du vecteur \vec{e}_3 .

Exprimons les composantes \vec{f}_1 et \vec{f}_2 du repère mobile dans le repère fixe comme

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= -\sin(\omega_0 t) \vec{e}_1 + \cos(\omega_0 t) \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 &= \cos(\omega_0 t) \vec{e}_1 + \sin(\omega_0 t) \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Pour le vecteur \vec{f}_3 , rappelons-nous que celui-ci vérifie, dans un repère droitier, que

$$\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2 = \vec{e}_3.$$

Décomposons le vecteur \overrightarrow{TC} dans la base mobile et remarquons que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{TC} &= \vec{r}_C \\ &= r_C \vec{f}_2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Afin de modéliser les équations du mouvement de n'importe quelle masse m , prenons un ensemble de coordonnées x_1, x_2, x_3 dans le repère mobile R_C^f . Dans les sous-sections suivantes, nous calculons l'accélération absolue composée des accélérations relatives, de Coriolis et d'entraînement,

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e. \tag{1.3}$$

1.1.1 Accélération relative

L'accélération relative représente l'accélération de la masse m dans le repère mobile R_C^f . Si nous notons la position relative comme étant

$$\vec{r}_r = x_1 \vec{f}_1 + x_2 \vec{f}_2 + x_3 \vec{f}_3, \tag{1.4}$$

alors la vitesse relative, dérivée de la position relative, s'exprime comme

$$\vec{v}_r = \dot{x}_1 \vec{f}_1 + \dot{x}_2 \vec{f}_2 + \dot{x}_3 \vec{f}_3.$$

L'accélération relative est alors la dérivée de la vitesse relative et s'écrit

$$\vec{a}_r = \ddot{x}_1 \vec{f}_1 + \ddot{x}_2 \vec{f}_2 + \ddot{x}_3 \vec{f}_3.$$

1.1.2 Accélération de Coriolis

L'accélération de Coriolis est un terme qui intervient lorsque l'on étudie un mouvement dans le repère mobile R_C^f en rotation autour d'un repère fixe R_T^e . Sa forme vectorielle est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{a}_c &= 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r \\ &= -2\omega_0 \dot{x}_2 \vec{f}_1 + 2\omega_0 \dot{x}_1 \vec{f}_2. \end{aligned}$$

1.1.3 Accélération d'entraînement

L'accélération d'entraînement est l'accélération qu'aurait la masse C si elle était fixe dans R_C^f . Sa forme vectorielle est donnée par

$$\vec{a}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{TC}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_r).$$

Intéressons-nous, tout d'abord, au premier terme $\frac{d^2 \overrightarrow{TC}}{dt^2}$ de l'accélération d'entraînement. Ce terme correspond à la cinématique de \overrightarrow{TC} et dépend donc de la vitesse angulaire ω_0 . Formellement, en partant de (1.2), nous obtenons que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overrightarrow{TC}}{dt^2} &= \frac{d^2(r_C \vec{f}_2)}{dt^2} \\ &= r_C \frac{d^2 \vec{f}_2}{dt^2}. \end{aligned}$$

En utilisant (??), il est alors facile de voir que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overrightarrow{TC}}{dt^2} &= r_C \frac{d}{dt} \left(-\omega_0 \sin(\omega_0 t) \vec{e}_1 + \omega_0 \cos(\omega_0 t) \vec{e}_2 \right) \\ &= r_C \left(-\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \vec{e}_1 - \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \vec{e}_2 \right) \\ &= -\omega_0^2 r_C \vec{f}_2. \end{aligned}$$

Ensuite, étudions le deuxième terme $\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_r$ de l'accélération d'entraînement. Remarquons que l'accélération angulaire $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_3$ est constante au cours du temps. Nous avons donc que $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$. Le deuxième terme de l'accélération d'entraînement se simplifie donc, comme

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_r = \vec{0}.$$

Pour finir, étudions le troisième terme $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_r)$ de l'accélération d'entraînement, le terme centripète, en remarquant que

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_r) = -\omega_0^2 x_1 \vec{f}_1 - \omega_0^2 x_2 \vec{f}_2.$$

L'expression de l'accélération d'entraînement est alors de la forme suivante

$$\begin{aligned} \vec{a}_e &= -\omega_0^2 r_C \vec{f}_2 - \omega_0^2 x_1 \vec{f}_1 - \omega_0^2 x_2 \vec{f}_2 \\ &= -\omega_0^2 x_1 \vec{f}_1 - (\omega_0^2 r_C + \omega_0^2 x_2) \vec{f}_2. \end{aligned}$$

Il suffit alors d'additionner les trois accélérations afin d'obtenir l'accélération absolue définie en (1.3)

$$\begin{aligned}\vec{a}_a &= \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e \\ &= (\ddot{x}_1 - 2\omega_0\dot{x}_2 - \omega_0^2 x_1) \vec{f}_1 + (\ddot{x}_2 + 2\omega_0\dot{x}_1 - \omega_0^2 r_C - \omega_0^2 x_2) \vec{f}_2 + \ddot{x}_3 \vec{f}_3.\end{aligned}\quad (1.5)$$

1.2 Calcul des forces

A présent, considérons la formation du satellite multi-câblé composé de $N + 1$ corps. Les N satellites adjoints sont notés S_i et ont une masse m_i pour tout $i = 1, \dots, N$. Ils sont reliés au satellite dit "corps principal", noté C , de masse m_C par des câbles d'extensibilité similaires et dont la masse sera négligée (voir FIGURE 1.3). Afin de décrire les équations du mouvement, utilisons la deuxième loi de Newton

$$m\vec{a}_a = \vec{F}_R, \quad (1.6)$$

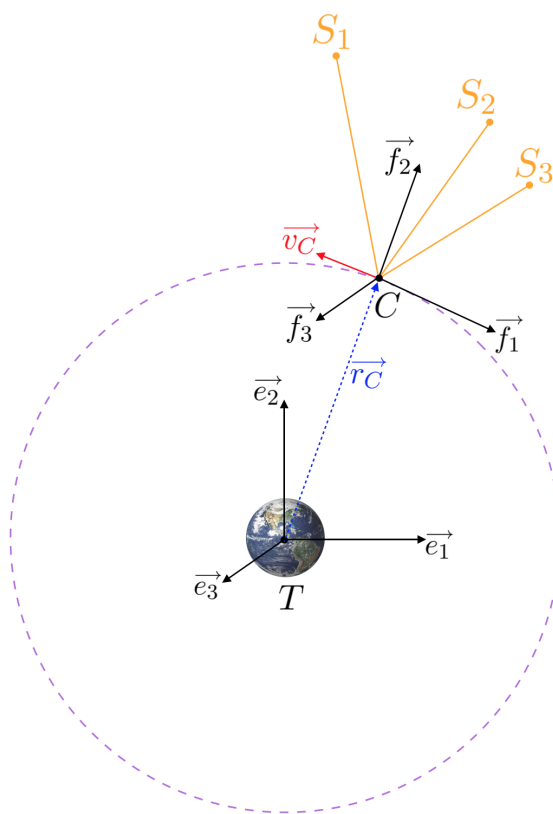


FIGURE 1.3 – Repère fixe et repère mobile du satellite principal C et des satellites adjoints S_i , pour tout $i = 1, \dots, 3$

où \vec{a}_a est l'accélération absolue dans le repère fixe R_T^e et \vec{F}_R la résultante des forces agissant sur m . Pour chaque satellite S_i de masse m_i , nous avons alors que

$$\begin{aligned} m_i \vec{a}_{a,i} &= \vec{F}_{R,i} \\ \Leftrightarrow m_i \vec{a}_{a,i} &= \vec{F}_{T,i} + \vec{T}_i, \end{aligned} \quad (1.7)$$

où $\vec{F}_{T,i}$ est la force d'attraction gravitationnelle de la Terre appliquée sur le satellite S_i et \vec{T}_i la force de tension entre le satellite S_i et le satellite principal C . A présent, supposons que tous les satellites adjoints S_i ont la même masse, notée $m = m_i$.

Ensuite, repartons de la seconde loi de Newton énoncée en (1.7) dans le repère mobile R_C^f et remplaçons l'accélération absolue par son expression donnée en (1.5). Nous obtenons que

$$\vec{F}_{T,i} + \vec{T}_i = m \left[(\ddot{x}_1 - 2\omega_0 \dot{x}_2 - \omega_0^2 x_1) \vec{f}_1 + (\ddot{x}_2 + 2\omega_0 \dot{x}_1 - \omega_0^2 r_C - \omega_0^2 x_2) \vec{f}_2 + \ddot{x}_3 \vec{f}_3 \right] \quad (1.8)$$

où nous omettons, pour l'instant, l'indice i du satellite S_i sur x_1 , x_2 et x_3 .

Développons, à présent, l'équation (1.8) afin d'en extraire les équations du mouvement. Pour ce faire, rappelons que la force gravitationnelle est définie comme

$$\vec{F}_{T,i} = -GmM \frac{\vec{TS}_i}{\|\vec{TS}_i\|^3}. \quad (1.9)$$

Décomposons le vecteur \vec{TS}_i dans le repère mobile R_C^f comme

$$\vec{TS}_i = \vec{TC} + \vec{CS}_i. \quad (1.10)$$

En utilisant l'expression de \vec{TC} donnée en (1.2), en identifiant \vec{CS}_i comme étant la position relative \vec{r}_r et en utilisant son expression donnée en (1.4), remarquons que

$$\vec{TS}_i = r_C \vec{f}_2 + x_1 \vec{f}_1 + x_2 \vec{f}_2 + x_3 \vec{f}_3,$$

où nous omettons, à nouveau, l'indice i du satellite S_i sur x_1 , x_2 et x_3 pour l'instant.

La norme de ce vecteur est donnée par

$$\|\vec{TS}_i\| = (x_1^2 + (x_2 + r_C)^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.11)$$

A présent, afin de simplifier les équations du mouvement, rappelons que la distance entre le satellite principal et la Terre est bien plus grande que la distance entre le satellite principal et les satellites adjoints. Cette hypothèse est pleine de bon sens car le système du satellite multi-câblé est envoyé suffisamment loin et les câbles sont beaucoup plus courts que la distance du

”corps principal” à la Terre. Par rapport à notre modèle, nous pouvons donc remarquer que les coordonnées x_1, x_2, x_3 de la position des satellites adjoints par rapport au satellite principal sont petits par rapport à r_C . Les rapports $\frac{x_1}{r_C}, \frac{x_2}{r_C}$ et $\frac{x_3}{r_C}$ sont alors de l’ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$.

Décomposons la force gravitationnelle $\vec{F}_{T,i}$ du satellite S_i selon les trois composantes x_1, x_2 et x_3 dans le repère mobile R_C de la manière suivante

$$\vec{F}_{T,i} = (F_{T,i})_{x_1} \vec{f}_1 + (F_{T,i})_{x_2} \vec{f}_2 + (F_{T,i})_{x_3} \vec{f}_3.$$

Ré-exprimons (1.9) selon la première composante x , en utilisant (1.11) afin d’en simplifier l’expression. Nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} (F_{T,i})_{x_1} &= -GM \frac{x_1}{\|\vec{OM}\|^3} \\ \Leftrightarrow \frac{(F_{T,i})_{x_1}}{m} &= -GM \frac{x_1}{(x_1^2 + (x_2 + r_C)^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

A présent, utilisons l’hypothèse énoncée précédemment afin d’obtenir une simplification de la force $(F_{T,i})_{x_1}$. Pour cela, réalisons l’Hocus-Pocus suivant

$$\begin{aligned} \frac{(F_{T,i})_{x_1}}{m} &= -GM \frac{x_1}{(x_1^2 + (x_2 + r_C)^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\textcolor{red}{r_C^3} \textcolor{red}{r_C}}{\textcolor{red}{r_C} \textcolor{red}{r_C^3}} \\ &= -GM \frac{\frac{x_1}{\textcolor{red}{r_C}}}{\left(\frac{x_1^2 + (x_2 + r_C)^2 + x_3^2}{\textcolor{red}{r_C^2}} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\textcolor{red}{r_C^2}}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Remarquons que le numérateur $\frac{x_1}{r_C}$ est de l’ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$. Intéressons-nous, ensuite, au dénominateur :

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1^2 + (x_2 + r_C)^2 + x_3^2}{r_C^2} \right)^{\frac{3}{2}} &= \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + r_C^2 + 2x_2 r_C + x_3^2}{r_C^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{x_1^2}{r_C^2} + \frac{x_2^2}{r_C^2} + \frac{2x_2}{r_C} + \frac{x_3^2}{r_C^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Grâce à l’hypothèse énoncée ci-dessus, $\frac{x_1^2}{r_C^2}, \frac{x_2^2}{r_C^2}$ et $\frac{x_3^2}{r_C^2}$ sont d’ordre $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ et $\frac{2x_2}{r_C}$ d’ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$.

Prenons uniquement en compte les termes d’ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$. La force gravitationnelle $\vec{F}_{T,i}$ s’écrit

alors

$$\begin{aligned}
\frac{(F_{T,i})_{x_1}}{m} &\simeq -GM \frac{x_1}{r_C} \frac{1}{r_C^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= -\frac{GM}{r_C^3} x_1 \\
&= -\omega_0^2 x_1.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Ce raisonnement est similaire pour la composante en x_3 , nous obtenons donc que

$$\frac{(F_{T,i})_{x_3}}{m} = -\omega_0^2 x_3. \tag{1.14}$$

Pour finir, intéressons-nous à la composante x_2 , qui présente une expression légèrement différente. En effet, ré-exprimons (1.9) selon la deuxième composante x_2 , en utilisant (1.11) afin d'en simplifier son expression. Cela nous amène à

$$\frac{(F_{T,i})_{x_2}}{m} = -GM \frac{(x_2 + r_C)}{(x_1^2 + (x_2 + r_C)^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Réalisons le même Hocus Pocus qu'en (1.13), ainsi que la même simplification d'ordre et obtenons que

$$\begin{aligned}
\frac{(F_{T,i})_{x_2}}{m} &= -GM \frac{\frac{x_2}{r_C} + 1}{\left(\frac{x_1^2 + (x_2 + r_C)^2 + x_3^2}{r_C^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{r_C^2} \\
&= -GM \frac{\frac{x_2}{r_C} + 1}{\left(1 + \frac{x_1^2}{r_C^2} + \frac{x_2^2}{r_C^2} + \frac{2x_2}{r_C} + \frac{x_3^2}{r_C^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{r_C^2}.
\end{aligned}$$

En ne prenant en compte que les termes d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$, la force gravitationnelle s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\frac{(F_{T,i})_{x_2}}{m} &\simeq -\frac{GM}{r_C^2} \left(\frac{x_2}{r_C} + 1 - \frac{3}{2} \frac{2x_2}{r_C} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&\simeq -\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 r_C + 3\omega_0^2 x_2.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Afin de connaître les équations du mouvement, repartons de l'expression (1.8),

$$\begin{cases} \frac{T_{i,x_1}}{m} + \frac{(F_{T,i})_{x_1}}{m} &= \ddot{x}_1 - 2\omega_0 \dot{x}_2 - \omega_0^2 x_1 \\ \frac{T_{i,x_2}}{m} + \frac{(F_{T,i})_{x_2}}{m} &= \ddot{x}_2 + 2\omega_0 \dot{x}_1 - \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 r_C \quad , \\ \frac{T_{i,x_3}}{m} + \frac{(F_{T,i})_{x_3}}{m} &= \ddot{x}_3 \end{cases}$$

et remplaçons l'expression de $(F_{T,i})_{x_1}$, $(F_{T,i})_{x_2}$ et $(F_{T,i})_{x_3}$ par (1.13), (1.14) et (1.15),

$$\begin{cases} \frac{T_{i,x_1}}{m} &= \ddot{x}_1 - 2\omega_0 \dot{x}_2 \\ \frac{T_{i,x_2}}{m} &= \ddot{x}_2 + 2\omega_0 \dot{x}_1 - 3\omega_0^2 x_2 \quad . \\ \frac{T_{i,x_3}}{m} &= \ddot{x}_3 + \omega_0^2 x_3 \end{cases} \quad (1.16)$$

Nous obtenons les mêmes équations que dans l'article [5] page 657. Afin d'être vraiment précis, nous écrivons

$$\begin{cases} \frac{T_{i,x_1}}{m} &= \ddot{x}_{1,i} - 2\omega_0 \dot{x}_{2,i} \\ \frac{T_{i,x_2}}{m} &= \ddot{x}_{2,i} + 2\omega_0 \dot{x}_{1,i} - 3\omega_0^2 x_{2,i} \quad . \\ \frac{T_{i,x_3}}{m} &= \ddot{x}_{3,i} + \omega_0^2 x_{3,i} \end{cases} \quad (1.17)$$

Dans la section suivante nous allons adapter ces équations à notre article de référence [9] en introduisant la notion de satellites adjoints.

1.3 Equations du mouvement du système du satellite multi-câblé en orbite autour de la Terre

A présent, appliquons les équations du mouvement du système développées précédemment à l'article de référence [9].

Pour cela, introduisons tout d'abord un référentiel vertical et horizontal localement VHL défini par le repère $R_O^g = \{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ (voir FIGURE 1.4) constitué des trois vecteurs

- \vec{g}_1 , tangent au mouvement orbital et est dans la direction du mouvement du centre de masse du système, de vecteur unitaire,
- \vec{g}_2 , orienté dans la direction de la normale au plan orbital,
- \vec{g}_3 , orienté dans la direction de la Terre.

Reprenons également l'hypothèse que tous les satellites adjoints S_i ont la même masse, notée $m = m_i$. Afin d'appliquer les équations du mouvement (1.16) à ce nouveau repère, il est important de remarquer que deux changements sont nécessaires. Le premier correspond à modifier le centre du repère mobile qui devient le centre de masse du satellite principal et des satellites adjoints et le deuxième nécessite de modifier l'ordre des axes ainsi que leur sens (voir FIGURE 1.5).

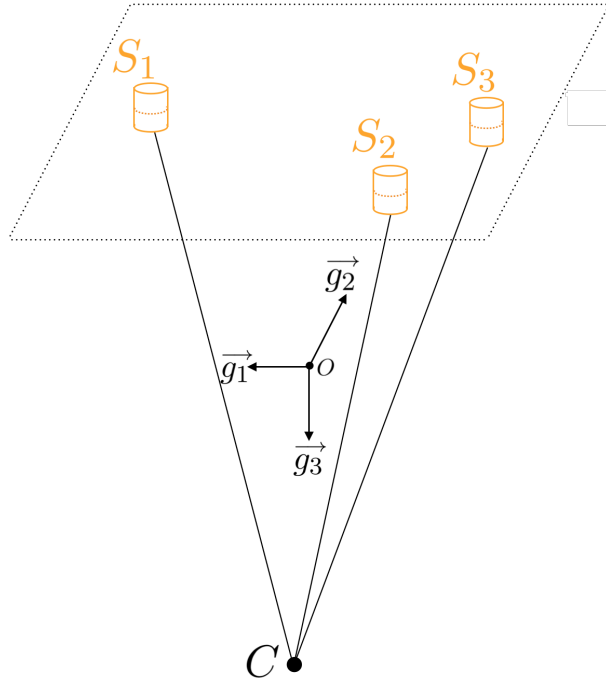


FIGURE 1.4 – Formation du système du satellite multi-câblé dans le système de référence VHL

1.3.1 Modification du centre du repère

Il est tout d'abord important de modifier le centre du repère mobile R_C^f afin qu'il devienne le centre de masse du système du satellite multi-câblé. Pour ce faire, nous notons le nouveau repère $R_O^f = \{O, f_1, f_2, f_3\}$. Repartons de la seconde loi de Newton appliquée au satellite principal et aux satellites adjoints. $\forall i = 1, \dots, N$,

$$m_C \vec{a}_C = -Gm_C m_T \frac{\vec{TC}}{\|\vec{TC}\|^3}, \quad m \vec{a}_i = -Gm m_T \frac{\vec{TS}_i}{\|\vec{TS}_i\|^3}.$$

Notons $\vec{r}_O = \vec{TO}$ et partons de l'équation du centre de masse

$$\sum_{i=1}^N m \vec{r}_i + m_C \vec{r}_C = M \vec{r}_O, \quad (1.18)$$

où $M = Nm + m_C$ est la masse totale du système du satellite multi-câblés. Prenons alors la dérivée seconde de l'équation du centre de masse et obtenons que

$$\sum_{i=1}^N m \ddot{\vec{r}}_i + m_C \ddot{\vec{r}}_C = M \ddot{\vec{r}}_O. \quad (1.19)$$

En gardant pour hypothèse que la distance entre le satellite principal et la Terre est bien plus grande que la distance entre le satellite principal et les satellites adjoints, nous remarquons qu'à l'ordre de troncature des équations du mouvement la distance entre la Terre et le satellite principal C est quasiment la même que celle entre la Terre et un satellite S_i , ce qui peut être vu comme

$$\|\vec{TS}_i\| \simeq \|\vec{TC}_i\|. \quad (1.20)$$

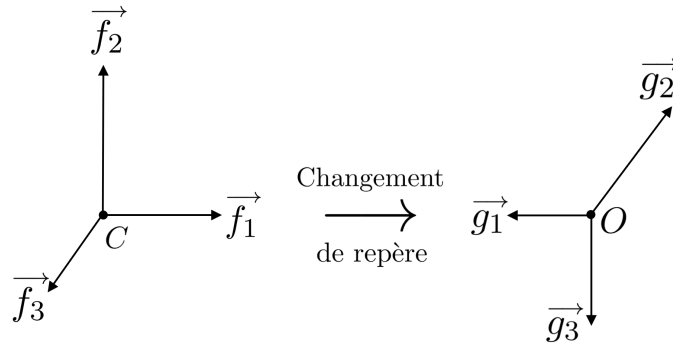


FIGURE 1.5 – Changement de repère

Enfin, repartons de l'équation (1.19)

$$\begin{aligned}
M\ddot{\vec{r}}_O &= \sum_{i=1}^N m \left(-Gm_T \frac{\vec{TS}_i}{\|\vec{TS}_i\|^3} \right) + m_C \left(-Gm_T \frac{\vec{TC}}{\|\vec{TC}\|^3} \right) \\
&= -Gm_T \left(m \sum_{i=1}^N \frac{\vec{TS}_i}{\|\vec{TS}_i\|^3} + m_C \frac{\vec{TC}}{\|\vec{TC}\|^3} \right) \\
&\stackrel{(1.20)}{\simeq} -Gm_T \left(m \sum_{i=1}^N \frac{\vec{TS}_i}{\|\vec{TC}\|^3} + m_C \frac{\vec{TC}}{\|\vec{TC}\|^3} \right) \\
&\simeq \frac{-Gm_T}{\|\vec{TO}\|^3} M \vec{TO}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc que

$$\ddot{\vec{r}}_O \simeq \frac{-Gm_T}{\|\vec{TO}\|^3} \vec{TO}.$$

Nous concluons alors qu'à l'ordre de troncature des équations du mouvement, l'équation du point O est similaire à celle du point C , tant la distance entre la Terre et le système du satellite multi-câblé est grande par rapport à la distance entre le satellite principal et le centre de masse du système.

1.3.2 Modification de l'ordre et du sens des axes

Il est évident qu'un changement de repère est nécessaire afin que les axes \vec{f}_1 , \vec{f}_2 et \vec{f}_3 respectent l'orientation des axes \vec{g}_1 , \vec{g}_2 et \vec{g}_3 . Les modifications à apporter peuvent être vues comme le changement de base

$$id_{\mathbb{R}^3} : (\mathbb{R}^3, R_O^f) \rightarrow (\mathbb{R}^3, R_O^g) \quad (1.21)$$

avec

$$\begin{cases} \vec{g}_1 &= -\vec{f}_1 \\ \vec{g}_2 &= -\vec{f}_3 \\ \vec{g}_3 &= -\vec{f}_2 \end{cases}.$$

Afin de vérifier que ce changement de repère conserve les propriétés d'une base orthogonale droite, assurons nous que

$$\begin{cases} \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 &= \vec{g}_3 \\ \vec{g}_3 \times \vec{g}_1 &= \vec{g}_2 \\ \vec{g}_2 \times \vec{g}_3 &= \vec{g}_1 \end{cases}.$$

Pour ce faire, calculons les trois produits vectoriels de la manière suivante

$$\begin{cases} \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 &= (-\vec{f}_1) \times (-\vec{f}_3) = \vec{f}_1 \times \vec{f}_3 \\ \vec{g}_3 \times \vec{g}_1 &= (-\vec{f}_2) \times (-\vec{f}_1) = \vec{f}_2 \times \vec{f}_1 \\ \vec{g}_2 \times \vec{g}_3 &= (-\vec{f}_3) \times (-\vec{f}_2) = \vec{f}_3 \times \vec{f}_2 \end{cases},$$

Ce qui peut être simplifié comme

$$\begin{cases} \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 &= -\vec{f}_2 = \vec{g}_3 \\ \vec{g}_3 \times \vec{g}_1 &= -\vec{f}_3 = \vec{g}_2 \\ \vec{g}_2 \times \vec{g}_3 &= -\vec{f}_1 = \vec{g}_1 \end{cases}.$$

Un tel changement de repère a donc du sens. Les coordonnées x_j ainsi que les composantes de la force de tension T_{i,x_j} subissent alors une modification similaire pour tout $i = 1, \dots, N$ et $j = 1, 2, 3$, à savoir que

$$\begin{cases} x_i &= -x_{1,i} \\ y_i &= -x_{3,i} \\ z_i &= -x_{2,i} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} T_{i,x} &= -T_{i,x_1} \\ T_{i,y} &= -T_{i,x_3} \\ T_{i,z} &= -T_{i,x_2} \end{cases}.$$

En appliquant ce changement de repère à (1.17), nous obtenons tout d'abord pour la première composante que

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{1,i} - 2\omega_0 \dot{x}_{2,i} &= \frac{T_{i,x_1}}{m} \\ \Leftrightarrow_{(1.21)} -\ddot{x}_i - 2\omega_0(-\dot{z}_i) &= \frac{-T_{i,x}}{m} \\ \Leftrightarrow \ddot{x}_i - 2\omega_0 \dot{z}_i &= \frac{T_{i,x}}{m}. \end{aligned}$$

Ensuite, pour la deuxième composante, nous avons que

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{2,i} + 2\omega_0 \dot{x}_{1,i} - 3\omega_0^2 x_{2,i} &= \frac{T_{i,x_2}}{m} \\ \Leftrightarrow_{(1.21)} -\ddot{z}_i - 2\omega_0 \dot{x}_i + 3\omega_0^2 y_i &= -\frac{T_{i,z}}{m} \\ \Leftrightarrow \ddot{z}_i + 2\omega_0 \dot{x}_i - 3\omega_0^2 y_i &= \frac{T_{i,z}}{m}. \end{aligned}$$

Enfin, pour la troisième composante, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{3,i} + \omega_0^2 x_{3,i} &= \frac{T_{i,x_3}}{m} \\ \Leftrightarrow_{(1.21)} -\ddot{y}_i - \omega_0^2 \dot{y}_i &= -\frac{T_{i,y}}{m} \\ \Leftrightarrow \ddot{y}_i + \omega_0^2 \dot{y}_i &= \frac{T_{i,y}}{m}. \end{aligned}$$

Les équations du mouvement, sont alors de la forme

$$\begin{cases} \ddot{x}_i &= 2\omega_0 \dot{z}_i + \frac{T_{i,x}}{m} \\ \ddot{y}_i &= -\omega_0^2 y_i + \frac{T_{i,y}}{m} \\ \ddot{z}_i &= -2\omega \dot{x}_i + 3\omega_0^2 z_i + \frac{T_{i,z}}{m} \end{cases}, \quad (1.22)$$

et sont appelées les équations de Hill–Clohessy–Wiltshire (HCW). Les composantes en x_i et z_i sont similaires à celle de l'article [9] (page 311, éq. 1) mais l'équation du mouvement pour la composante y_i est différente de celle mentionnée dans l'article [9] (page 311, éq. 1) à un signe près. Cependant, à la page 312 éq. 7, lors de la linéarisation des équations du mouvement, le signe change à nouveau. Nous concluons donc qu'il y a une erreur dans l'article [9] (page 311) et que nous utiliserons les équations du système (1.22).

1.4 Modèle usuel viscoélastique de la tension

Dans cette section, nous adoptons le modèle usuel viscoélastique de la tension totale afin de modéliser la force de tension des câbles et nous détaillons deux cas différents : lorsque les câbles sont tendus ou détendus. Soit T , la tension totale appliquée à une masse donnée m , qui correspond à la masse du satellite C , notée m_C . Considérons S_i un satellite relié au corps principal C au moyen d'un câble. Ce câble est de masse négligeable, possède un coefficient d'amortissement noté b et un coefficient d'élasticité noté k . Notons

- l_i la position relative du câble entre la masse C et S_i ,
- l_0 la longueur d'attache du câble détendu,
- Δl_i l'élongation de l'élément de câble entre C et S_i .

La position relative du câble entre C et S_i est définie par

$$\begin{aligned} l_i &= \|\vec{r}_C - \vec{r}_i\| \\ &= [(x_C - x_i)^2 + (y_C - y_i)^2 + (z_C - z_i)^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

et l'élongation de l'élément de câble entre C et S_i est définie par

$$\Delta l_i = l_i - l_0.$$

Les vecteurs positions \vec{r}_C et \vec{r}_i sont tels que

$$\begin{aligned}\vec{r}_C &= \vec{OC} \\ &= x_C \vec{g}_1 + y_C \vec{g}_2 + z_C \vec{g}_3 \\ \vec{r}_i &= \vec{OS}_i \\ &= x_i \vec{g}_1 + y_i \vec{g}_2 + z_i \vec{g}_3.\end{aligned}$$

Un tel système du satellite multi-câblé peut présenter deux configurations différentes, à savoir

1. Le câble reliant les deux satellites C et S_i n'est pas tendu $\Leftrightarrow \Delta l_i \leq 0$.

Le câble ne transmet aucune force, il n'y a pas d'action présente entre les masses connectées. Uniquement la force gravifique intervient dans leurs mouvements. La tension du câble est alors nulle :

$$\vec{T}_i = 0.$$

2. Le câble reliant les deux satellites C et S_i est tendu $\Leftrightarrow \Delta l_i > 0$.

La tension dépend du coefficient d'élasticité k et d'amortissement b du câble. Son expression est alors donnée par

$$\vec{T}_i = \left(k \Delta l_i + b \frac{dl_i}{dt} \right) \vec{e}_{C,i}, \quad (1.24)$$

où $\vec{e}_{C,i} = \frac{\vec{r}_C - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_C - \vec{r}_i\|}$ est le vecteur unitaire dans la direction du câble.

1.5 Equilibre du système

Dans cette section, nous cherchons les composantes x , y et z de l'équilibre du système du satellite multi-câblé. Dans le cadre de ce travail, nous suggérons de suivre le développement de l'article [9] en développant uniquement l'équilibre sur lequel ce dernier se penche. Nous n'excluons cependant pas la possibilité d'existence d'autres équilibres mais sans aucun intérêt pour l'application voulue. Considérons alors S_i un satellite adjoint de masse $m = m_i$ relié au corps principal C au moyen d'un câble. A l'équilibre, notons $\vec{r}_C^* = \vec{r}_C$, $\vec{r}_i^* = \vec{r}_i$ et $l_i^* = l_i > l_0$. L'équilibre est atteint lorsque tous les satellites sont immobiles dans le repère mobile, ce qui revient à considérer que

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{0}. \quad (1.25)$$

La position des câbles est alors alignée le long de l'axe \vec{g}_3 du système de référence VHL comme représenté sur la FIGURE 1.6. A présent, nous aimerions connaître les composantes à l'équilibre de la tension \vec{T} . Lorsque le système est à l'équilibre, la position relative du câble entre C et S_i ne varie plus, ce qui revient à considérer que $\frac{dl_i}{dt} = 0$. En repartant de l'équation de la tension reprise en (1.24), nous avons alors que les composantes de la tension se simplifient de la manière suivante :

$$\begin{cases} T_{i,x}^* &= k\Delta l_i \frac{x_C^* - x_i^*}{l_i} \\ T_{i,y}^* &= k\Delta l_i \frac{y_C^* - y_i^*}{l_i} \\ T_{i,z}^* &= k\Delta l_i \frac{z_C^* - z_i^*}{l_i} \end{cases} . \quad (1.26)$$

A l'équilibre, les équations du mouvement en x_i et y_i sont données par

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i^* &= 2\omega_0 \dot{z}_i^* + \frac{T_{i,x}^*}{m} \\ \ddot{y}_i^* &= \omega_0^2 y_i^* + \frac{T_{i,y}^*}{m} . \end{aligned}$$

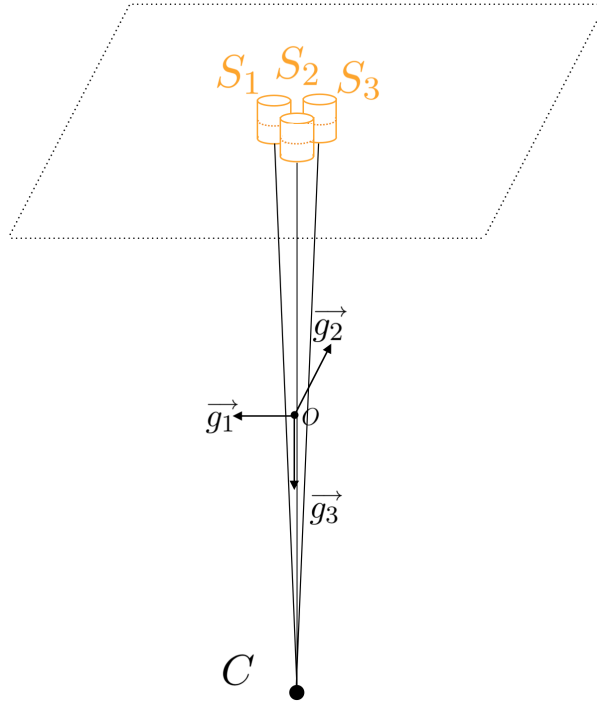


FIGURE 1.6 – Formation du système du satellite multi-câblé en équilibre dans le système de référence VHL

Par (1.25), $\ddot{x}_i^* = \ddot{y}_i^* = 0$ et $\dot{z}_i^* = 0$, ce qui nous permet de conclure que

$$\frac{T_{i,x}^*}{m} = 0 \quad (1.27)$$

$$\omega_0^2 y_i^* + \frac{T_{i,y}^*}{m} = 0. \quad (1.28)$$

Intéressons-nous tout d'abord à (1.27) et remarquons que

$$\begin{aligned} T_{i,x}^* = 0 &\Leftrightarrow k\Delta l_i \frac{x_C^* - x_i^*}{l_i} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{x_C^* - x_i^*}{l_i} = 0 \\ &\Rightarrow x_C^* = x_i^* \end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire, développons ensuite (1.28). Etant donné la présence du terme $\omega_0^2 y_i^*$, il est nécessaire d'imposer que $y_i^* = 0$. Nous obtenons alors que :

$$\begin{aligned} T_{i,y}^* = 0 &\Leftrightarrow k\Delta l_i \frac{y_C^* - y_i^*}{l_i} = 0 \\ &\Rightarrow y_C^* = y_i^* = 0. \end{aligned}$$

Pour la composante en z_i , le développement effectué en x et y ne peut être appliqué, car l'équation du mouvement en z est plus complexe. Partons alors de l'équation du centre de masse reprise en (1.18) et exprimons-la selon la composante z ,

$$m \sum_{i=1}^N z_i + m_C z_C = 0.$$

A l'équilibre, l'équation du centre de masse se réécrit comme

$$m \sum_{i=1}^N z_i^* = -m_C z_C^*. \quad (1.29)$$

Une solution existe, et revient à prendre tous les z_i^* identiques, l'équation (1.29) devient

$$Nm z_i^* = -m_C z_C^* \Leftrightarrow z_i^* = -\frac{m_C}{Nm} z_C^*.$$

Nous trouvons alors l'équilibre suivant :

$$\begin{cases} x_i^* = x_C^* \\ y_i^* = y_C^* = 0 \\ z_i^* = -\frac{m_C}{Nm} z_C^* \end{cases} . \quad (1.30)$$

1.6 Valeur critique du coefficient d'élasticité du câble

Dans cette section nous établissons la valeur critique du coefficient d'élasticité du câble k pour laquelle l'équilibre est atteint. Considérons à nouveau un satellite adjoint S_i en particulier. Repartons tout d'abord de la position relative du câble entre S_i et C reprise en (1.23) et appliquons-la à l'équilibre donné en (1.30), afin d'obtenir la longueur du câble dans la configuration d'équilibre

$$\begin{aligned} l_i^* &= \|r_C^* - r_i^*\| \\ &= \left[(x_C^* - x_i^*)^2 + (y_C^* - y_i^*)^2 + (z_C^* - z_i^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= z_C^* - z_i^* \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(1.30)}{=} z_C^* \left(1 + \frac{m_C}{Nm} \right) \\ &> l_0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ensuite, reprenons l'équation du mouvement pour la composante z_i . Par (1.25), nous avons vu qu'en particulier $\ddot{x}_i^* = \ddot{y}_i^* = 0$ et $\dot{z}_i^* = 0$, ce qui nous permet de développer la tension du câble à l'équilibre de cette manière :

$$\begin{aligned} \ddot{z}_i^* = -2\omega_0 \dot{z}_i^* + 3\omega_0^2 z_i^* + \frac{T_{i,z}^*}{m} &\Leftrightarrow 3\omega_0^2 z_i^* + \frac{T_{i,z}^*}{m} = 0 \\ &\Leftrightarrow T_{z,i}^* = -3\omega_0^2 z_i^* m. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Développons la composante en z de la tension du câble d'une autre manière, en partant de (1.26)

$$\begin{aligned} T_{i,z}^* &= k\Delta l_i \frac{z_C^* - z_i^*}{l_i} \\ &\stackrel{(1.31)}{=} k\Delta l_i \\ &= k(l_i^* - l_0). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Enfin, en combinant (1.33), (1.34), nous obtenons

$$\begin{aligned}
-3\omega_0^2 z_i^* m = k(l_i^* - l_0) &\Leftrightarrow l_0 - \frac{3\omega_0^2}{k} z_i^* m = l_i^* \\
&\stackrel{(1.31)}{\Leftrightarrow} l_0 - \frac{3\omega_0^2}{k} z_i^* m = z_C^* - z_i^* \\
&\stackrel{(1.30)}{\Leftrightarrow} l_0 - \frac{3\omega_0^2}{k} z_i^* m = -\frac{Nm}{m_C} z_i^* - z_i^* \\
&\Leftrightarrow l_0 = -z_i^* \left(1 + \frac{Nm}{m_C}\right) + \frac{3\omega_0^2}{k} z_i^* m \tag{1.35}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow z_i^* = -l_0 \left[\left(\frac{m_C + Nm}{m_C} \right) - \frac{3\omega_0^2}{k} m \right]^{-1}. \tag{1.36}$$

Afin de trouver la condition pour le coefficient d'élasticité du câble k , remarquons que le dénominateur de l'équation (1.36) doit être strictement positif, ce qui nous permet de dire que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m_C + Nm}{m_C} \right) - \frac{3\omega_0^2}{k} m > 0 &\Leftrightarrow \frac{m_C + Nm}{m_C} > \frac{3\omega_0^2}{k} m \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{k} < \frac{m_C + Nm}{3\omega_0^2 m_C m} \\
&\Leftrightarrow k > \frac{3\omega_0^2 m_C m}{m_C + Nm}, \tag{1.37}
\end{aligned}$$

ce qui nous fournit une borne inférieure pour le coefficient k . Les câbles doivent donc être suffisamment rigides pour contrecarrer la microgravité. Pour conclure, remarquons que tous les z_i^* sont identiques, ce qui signifie que tous les l_i^* également. Nous avons donc que $\forall i$,

$$l_i^* = l^* \text{ et } T_{i,z}^* = T_z^*.$$

Chapitre 2

Mouvements autour de l'équilibre

Sommaire

2.1	Equation vectorielle de la tension à l'équilibre	28
2.2	Equation vectorielle de la tension générale lors de faibles déplacements des satellites adjoints et du satellite principal	29
2.3	Equations du mouvement des satellites adjoints et du satellite prin- cipal lors de faibles déplacements	33

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de déplacements du satellite principal et des satellites adjoints autour de l'équilibre identifié afin d'obtenir un système d'équations dérivées. Pour ce faire, nous développons tout d'abord l'équation vectorielle de la tension à l'équilibre, pour ensuite réécrire la tension générale du système en introduisant les faibles déplacements du satellite principal et des satellites adjoints. Enfin, nous arrivons aux équations du mouvement des satellites adjoints et du satellite principal autour de l'équilibre identifié au chapitre 1 lors de faibles déplacements pour chacune des trois composantes.

2.1 Equation vectorielle de la tension à l'équilibre

Dans cette section, nous établissons l'équation vectorielle de la tension lorsque le système global est à l'équilibre. L'équilibre envisagé est celui du chapitre précédent, à savoir lorsque tous les câbles sont tendus et alignés le long de l'axe \vec{g}_3 . Considérons à nouveau un satellite adjoint S_i en particulier, développons tout d'abord l'expression suivante

$$\begin{aligned}
 \frac{l^* - l_0}{l^*} &= \frac{l_i^* - l_0}{l_i^*} \\
 &\stackrel{(1.31)}{=} \frac{z_C^* - z_i^* - l_0}{z_C^* - z_i^*} \\
 &\stackrel{(1.35)}{=} \frac{z_C^* - z_i^* + z_i^* \left(1 + \frac{Nm}{m_C}\right) - \frac{3\omega_0^2}{k} z_i^* m}{z_C^* - z_i^*} \\
 &\stackrel{(1.30)}{=} \frac{-\frac{Nm}{m_C} z_i^* - z_i^* + z_i^* \left(1 + \frac{Nm}{m_C}\right) - \frac{3\omega_0^2}{k} z_i^* m}{-\frac{Nm}{m_C} z_i^* - z_i^*} \\
 &= \frac{z_i^* \left(-\frac{Nm}{m_C} - 1 + 1 + \frac{Nm}{m_C} - \frac{3\omega_0^2}{k} m\right)}{z_i^* \left(-\frac{Nm}{m_C} - 1\right)} \\
 &= -\frac{3\omega_0^2}{k} m \left(-\frac{Nm}{m_C} - 1\right)^{-1} \\
 &= \frac{3\omega_0^2}{k} \frac{m m_C}{Nm + m_C},
 \end{aligned}$$

afin d'obtenir les notations

$$\lambda^* = \frac{l^* - l_0}{l^*} = \frac{3\omega_0^2}{k} m_r \quad (2.1)$$

où $m_r = \frac{m m_C}{Nm + m_C}$. Ensuite, remarquons que les forces de tension dans tous les câbles de la configuration d'équilibre présentée sur la FIGURE 1.6 ont la même valeur \vec{T}^* donnée par la formule suivante

$$\vec{T}^* = k(l^* - l_0) \vec{g}_3.$$

2.2 Equation vectorielle de la tension générale lors de faibles déplacements des satellites adjoints et du satellite principal

Repartons de la formule (1.24) et développons-la de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \vec{T}_i &= \left(k\Delta l_i + b \frac{dl_i}{dt} \right) \vec{e}_{C,i} \\
 &= \left[k \|\vec{r}_C - \vec{r}_i\| - l_0 + b \frac{d}{dt} \|\vec{r}_C - \vec{r}_i\| \right] \frac{(\vec{r}_C - \vec{r}_i)}{\|\vec{r}_C - \vec{r}_i\|} \\
 &= \left[k \frac{\|\vec{r}_C - \vec{r}_i\| - l_0}{\|\vec{r}_C - \vec{r}_i\|} + b \frac{1}{\|\vec{r}_C - \vec{r}_i\|} \frac{d}{dt} \|\vec{r}_C - \vec{r}_i\| \right] (\vec{r}_C - \vec{r}_i). \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

Soit \vec{a} un vecteur quelconque. Notons à présent $\|\vec{a}\| = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2}$. Il en ressort alors que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \|\vec{a}\| &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\vec{a}\|} (2a_x \dot{a}_x + 2a_y \dot{a}_y + 2a_z \dot{a}_z) \\
 &= \frac{1}{\|\vec{a}\|} (a_x \dot{a}_x + a_y \dot{a}_y + a_z \dot{a}_z). \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

En posant $\vec{a}_i = \vec{r}_C - \vec{r}_i$, et $\vec{a}_i^* = \vec{r}_C^* - \vec{r}_i^*$ il est facile de remarquer que

$$\vec{a}_i^* = (x_C^* - x_i^*) \vec{g}_1 + (y_C^* - y_i^*) \vec{g}_2 + (z_C^* - z_i^*) \vec{g}_3.$$

Etant donné que nous étudions de faibles déplacements autour de l'équilibre, nous pouvons ici considérer que

$$\begin{cases} x_i^* = x_C^* \\ y_i^* = y_C^* = 0 \\ z_i^* = -\frac{m_C}{Nm} z_C^* \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_i^* &= (x_i^* - x_i^*) \vec{g}_1 + (y_i^* - y_i^*) \vec{g}_2 + (z_C^* - z_i^*) \vec{g}_3 \\
 &= (z_C^* - z_i^*) \vec{g}_3.
 \end{aligned}$$

Par (1.31), nous avons alors que

$$\vec{a}_i^* = l_i^* \vec{e}_z$$

et est indépendant du i .

Les composantes de $\vec{a}^* = \vec{a}_i^*$, $\forall i$ sont alors les suivantes

$$\begin{cases} a_x^* = 0 \\ a_y^* = 0 \\ a_z^* = l^* \end{cases} . \quad (2.4)$$

Il est alors possible de réécrire la tension générale en combinant les équations (2.2) et (2.3) de la manière suivante

$$\vec{T}_i = \left[k \frac{\|\vec{a}\| - l_0}{\|\vec{a}\|} + b \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} (a_x \dot{a}_x + a_y \dot{a}_y + a_z \dot{a}_z) \right] \vec{a}.$$

Introduisons de petits déplacements du système autour de l'équilibre. Il est alors possible de réécrire le vecteur \vec{a} d'une autre manière, en le décomposant par rapport à l'équilibre,

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \Delta\vec{a},$$

ou encore

$$\begin{cases} a_x = a_x^* + \Delta x \\ a_y = a_y^* + \Delta y \\ a_z = a_z^* + \Delta z \end{cases}$$

et en utilisant (2.4)

$$\begin{cases} a_x = \Delta x \\ a_y = \Delta y \\ a_z = l^* + \Delta z \end{cases} ,$$

avec la dérivée temporelle déterminée par les composantes

$$\begin{cases} \dot{a}_x = \Delta \dot{x} \\ \dot{a}_y = \Delta \dot{y} \\ \dot{a}_z = \Delta \dot{z} \end{cases} .$$

Recalculons la norme de \vec{a} avec cette nouvelle définition en terme de petits déplacements du système général autour de l'équilibre,

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}\| &= \|\vec{a}^* + \Delta\vec{a}\| \\
&= \left[\Delta x^2 + \Delta y^2 + (l^* + \Delta z)^2 \right]^{1/2} \\
&= \left[\Delta x^2 + \Delta y^2 + \left(l^{*2} + 2\Delta z l^* + \Delta z^2 \right) \right]^{1/2} \\
&= l^* \left[\frac{\Delta x^2}{l^{*2}} + \frac{\Delta y^2}{l^{*2}} + \left(1 + 2\frac{\Delta z}{l^*} + \frac{\Delta z^2}{l^{*2}} \right) \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

En ne considérant que les termes du premier ordre, nous obtenons

$$\|\vec{a}\| = l^* \left[1 + 2\frac{\Delta z}{l^*} + \dots \right]^{1/2}.$$

A présent, développons cette expression sous forme de série grâce à cette formule

$$\begin{aligned}
(1+b)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}b + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)b^2}{2!} + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

ce qui nous permet d'arriver à

$$\left[1 + 2\frac{\Delta z}{l^*} + \dots \right]^{1/2} = l^* \left[1 + 2\frac{1}{2}\frac{\Delta z}{l^*} + \dots \right].$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}\| &= l^* \left[1 + \frac{\Delta z}{l^*} + \dots \right] \\
&\simeq l^* + \Delta z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}\|^2 &= l^{*2} \left[1 + 2\frac{\Delta z}{l^*} + \dots \right] \\
&\simeq l^{*2} + 2l^* \Delta z.
\end{aligned}$$

Il est alors possible de développer la tension en l'approximant par

$$\vec{T}_i \simeq \vec{a} \left[k \frac{l^* - l_0 + \Delta z}{l^* + \Delta z} + b \frac{1}{l^{*2} + 2l^* \Delta z} \left(\Delta x \Delta \dot{x} + \Delta y \Delta \dot{y} + (\Delta z + l^*) \Delta \dot{z} \right) \right]. \tag{2.6}$$

A nouveau, nous prenons la décision de ne pas considérer les termes d'ordre 2. Ceux-ci apparaîtront lors de la multiplication des composantes de a et \dot{a} dans (2.6), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\vec{T}_i &\simeq \vec{a} \left[k \frac{l^* - l_0 + \Delta z}{l^* + \Delta z} + b \frac{1}{l^{*2} + 2l^* \Delta z} \left(\underbrace{\Delta x \Delta \dot{x} + \Delta y \Delta \dot{y} + \Delta z \Delta \dot{z}}_{\text{ordre 2}} + l^* \Delta \dot{z} \right) \right] \\
&\simeq \vec{a} \left[k \frac{l^* - l_0}{l^* + \Delta z} + k \frac{\Delta z}{l^* + \Delta z} + b \frac{l^* \Delta \dot{z}}{l^{*2} + 2l^* \Delta z} \right] \\
&\simeq \vec{a} \left[k \frac{l^* - l_0}{l^*} \left(1 + \frac{\Delta z}{l^*} \right)^{-1} + k \frac{\Delta z}{l^*} \left(1 + \frac{\Delta z}{l^*} \right)^{-1} + b \frac{l^* \Delta \dot{z}}{l^{*2}} \left(1 + \frac{2\Delta \dot{z}}{l^*} \right)^{-1} \right] \\
&\simeq \vec{a} \left[k \frac{l^* - l_0}{l^*} \left(1 - \frac{\Delta z}{l^*} \right) + k \frac{\Delta z}{l^*} - \underbrace{k \frac{\Delta z^2}{l^*}}_{\text{ordre 2}} + b \frac{l^* \Delta \dot{z}}{l^{*2}} - \underbrace{b \frac{2l^* \Delta \dot{z}^2}{l^{*3}}}_{\text{ordre 2}} \right] + \dots \\
&\simeq \vec{a} \left[k \frac{l^* - l_0}{l^*} \left(1 - \frac{\Delta z}{l^*} \right) + k \frac{\Delta z}{l^*} + b \frac{l^* \Delta \dot{z}}{l^{*2}} \right] + \dots
\end{aligned}$$

Remplaçons \vec{a} par le triplet de ses 3 composantes,

$$\begin{aligned}
&= (\Delta x, \Delta y, l^* + \Delta z) \left[\frac{k(l^* - l_0)}{l^*} - \frac{k(l^* - l_0)}{l^{*2}} \Delta z + \frac{k}{l^*} \Delta z + \frac{b}{l^*} \Delta \dot{z} \right] \\
&= \left[(0, 0, l^*) + (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \right] \left[\frac{k(l^* - l_0)}{l^*} - \frac{k(l^* - l_0)}{l^{*2}} \Delta z + \frac{k}{l^*} \Delta z + \frac{b}{l^*} \Delta \dot{z} \right] \\
&= \left(0, 0, \frac{k(l^* - l_0)}{l^*} l^* - \frac{k(l^* - l_0)}{l^{*2}} l^* \Delta z + \frac{k}{l^*} l^* \Delta z + \frac{b}{l^*} l^* \Delta \dot{z} \right) \\
&\quad + \left(\frac{k(l^* - l_0)}{l^*} \Delta x - \frac{k(l^* - l_0)}{l^{*2}} \underbrace{\Delta x \Delta z}_{=0} + \frac{k}{l^*} \underbrace{\Delta x \Delta z}_{=0} + \frac{b}{l^*} \underbrace{\Delta x \Delta \dot{z}}_{=0}, 0, 0 \right) \\
&\quad + \left(0, \frac{k(l^* - l_0)}{l^*} \Delta y - \frac{k(l^* - l_0)}{l^{*2}} \underbrace{\Delta y \Delta z}_{=0} + \frac{k}{l^*} \underbrace{\Delta y \Delta z}_{=0} + \frac{b}{l^*} \underbrace{\Delta y \Delta \dot{z}}_{=0}, 0 \right) \\
&\quad + \left(0, 0, \frac{k(l^* - l_0)}{l^*} \Delta z - \frac{k(l^* - l_0)}{l^{*2}} \underbrace{\Delta z \Delta z}_{\text{ordre 2}} + \frac{k}{l^*} \underbrace{\Delta z \Delta z}_{\text{ordre 2}} + \frac{b}{l^*} \underbrace{\Delta y \Delta \dot{z}}_{\text{ordre 2}} \right) \\
&= \left(0, 0, k(l^* - l_0) - \frac{k(l^* - l_0)}{l^*} \Delta z + k \Delta z + b \Delta \dot{z} \right) + \left(\frac{k(l^* - l_0)}{l^*} \Delta x, \frac{k(l^* - l_0)}{l^*} \Delta y, \frac{k(l^* - l_0)}{l^*} \Delta z \right) \\
&= (0, 0, k(l^* - l_0)) + \left(\frac{k(l^* - l_0)}{l^*} \Delta x, \frac{k(l^* - l_0)}{l^*} \Delta y, -\frac{k(l^* - l_0)}{l^*} \Delta z + k \Delta z + b \Delta \dot{z} \frac{k(l^* - l_0)}{l^*} \Delta z \right) \\
&= \underbrace{k(l^* - l_0) \vec{g}_3}_{=\vec{T}^*} + \underbrace{k \frac{l^* - l_0}{l^*} \Delta x \vec{g}_1}_{=\lambda^*} + \underbrace{k \frac{l^* - l_0}{l^*} \Delta y \vec{g}_2}_{=\lambda^*} + k \Delta z \vec{g}_3 + b \Delta \dot{z} \vec{g}_3.
\end{aligned}$$

Notons à présent $\Delta x_C, \Delta y_C, \Delta z_C$ les composantes des déplacements du satellite principal C et $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ les composantes des déplacements du satellite adjoint S_i . Rappelons que

$$\begin{cases} \Delta x = \Delta x_C - \Delta x_i \\ \Delta y = \Delta y_C - \Delta y_i \\ \Delta z = \Delta z_C - \Delta z_i \end{cases} .$$

Nous pouvons alors obtenir une expression approximée pour les forces de traction en cas de petits déplacements du satellite principal et des satellites adjoints par rapport à l'équilibre trouvé précédemment

$$\vec{T}_i = \vec{T}^* + k\lambda^* (\Delta x_C - \Delta x_i) \vec{g}_1 + k\lambda^* (\Delta y_C - \Delta y_i) \vec{g}_2 + [k (\Delta z_C - \Delta z_i) + b (\Delta \dot{z}_C - \Delta \dot{z}_i)] \vec{g}_3. \quad (2.7)$$

2.3 Equations du mouvement des satellites adjoints et du satellite principal lors de faibles déplacements

A présent, nous pouvons détailler les équations du mouvement des satellites adjoints et du satellite principal lors de faibles déplacements selon leurs trois composantes. Tout d'abord, repartons des équations du mouvement des satellites adjoints

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = 2\omega_0 \dot{z}_i + \frac{T_{i,x}}{m} \\ \ddot{y}_i = -\omega_0^2 y_i + \frac{T_{i,y}}{m} \\ \ddot{z}_i = -2\omega_0 \dot{x}_i + 3\omega_0^2 z_i + \frac{T_{i,z}}{m} \end{cases}, \quad (2.8)$$

et du satellite principal

$$\begin{cases} \ddot{x}_C = 2\omega_0 \dot{z}_C - \sum_{i=1}^N \frac{T_{i,x}}{m_C} \\ \ddot{y}_C = -\omega_0^2 y_C - \sum_{i=1}^N \frac{T_{i,y}}{m_C} \\ \ddot{z}_C = -2\omega_0 \dot{x}_C + 3\omega_0^2 z_C - \sum_{i=1}^N \frac{T_{i,z}}{m_C} \end{cases}. \quad (2.9)$$

Adaptons les avant tout en termes de petits déplacements du satellite principal. Celui-ci subit la somme des tensions des satellites adjoints dirigées dans le sens contraire de l'axe \vec{g}_3 comme représenté sur la FIGURE 2.1, ce qui donne autour de l'équilibre :

$$\begin{cases} \Delta \ddot{x}_C &= 2\omega_0 \Delta \dot{z}_C - \sum_{i=1}^N \frac{T_{i,x}}{m_C} \\ \Delta \ddot{y}_C &= -\omega_0^2 \Delta y_C - \sum_{i=1}^N \frac{T_{i,y}}{m_C} \\ \Delta \ddot{z}_C &= -2\omega_0 \Delta \dot{x}_C + 3\omega_0^2 \Delta z_C - \sum_{i=1}^N \frac{T_{i,z}}{m_C} \end{cases} . \quad (2.10)$$

Décomposons l'équation des forces de tension linéarisée (2.7) selon les composantes x , y et z ,

$$\begin{cases} T_{i,x} &= k\lambda^* (\Delta x_C - \Delta x_i) \\ T_{i,y} &= k\lambda^* (\Delta y_C - \Delta y_i) \\ T_{i,z} &= k (\Delta z_C - \Delta z_i) + b (\Delta \dot{z}_C - \Delta \dot{z}_i) \end{cases} , \quad (2.11)$$

et remplaçons-les dans le système (2.10)

$$\begin{cases} \Delta \ddot{x}_C &= 2\omega_0 \Delta \dot{z}_C - \lambda_* \frac{k}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta x_C - \Delta x_i) \\ \Delta \ddot{y}_C &= -\omega_0^2 \Delta y_C - \lambda_* \frac{k}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta y_C - \Delta y_i) \\ \Delta \ddot{z}_C &= -2\omega_0 \Delta \dot{x}_C + 3\omega_0^2 \Delta z_C - \frac{k}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta z_C - \Delta z_i) - \frac{b}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta \dot{z}_C - \Delta \dot{z}_i) \end{cases} . \quad (2.12)$$

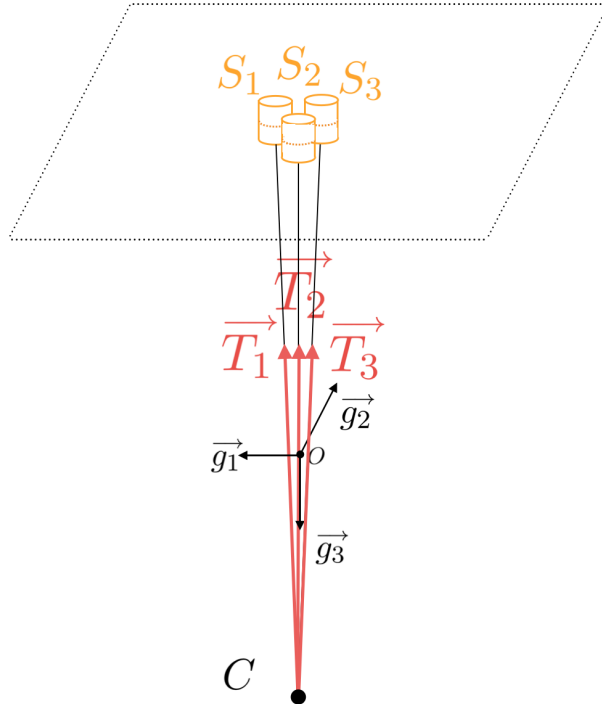


FIGURE 2.1 – Tensions des câbles des satellites adjoints subies par le satellite principal en équilibre

Ensuite, détaillons les équations du mouvement des déplacements des satellites adjoints. Pour cela, repartons des équations du mouvement du système (2.8). A l'équilibre, ceux-ci subissent chacun la tension du satellite principal dirigée le long de l'axe \vec{g}_3 comme représenté sur la FIGURE 2.2, ce qui donne

$$\begin{cases} \Delta\ddot{x}_i &= 2\omega_0\Delta\dot{z}_i + \frac{T_{i,x}}{m_S} \\ \Delta\ddot{y}_i &= -\omega_0^2\Delta y_i + \frac{T_{i,y}}{m_S} \\ \Delta\ddot{z}_i &= -2\omega_0\Delta\dot{x}_i + 3\omega_0^2\Delta z_i + \frac{T_{i,z}}{m_S} \end{cases} . \quad (2.13)$$

Enfin, utilisons les composantes de la tension linéarisée donnée par le système d'équations (2.11) et remplaçons les dans le système d'équations du mouvement (2.13) afin d'obtenir que

$$\begin{cases} \Delta\ddot{x}_i &= 2\omega_0\Delta\dot{z}_i + \lambda_* \frac{k}{m_S} (\Delta x_C - \Delta x_i) \\ \Delta\ddot{y}_i &= -\omega_0^2\Delta y_i + \lambda_* \frac{k}{m_S} (\Delta y_C - \Delta y_i) \\ \Delta\ddot{z}_i &= -2\omega_0\Delta\dot{x}_i + 3\omega_0^2\Delta z_i + \frac{k}{m_S} (\Delta z_C - \Delta z_i) + \frac{b}{m_S} (\Delta z_C - \Delta z_i) \end{cases} . \quad (2.14)$$

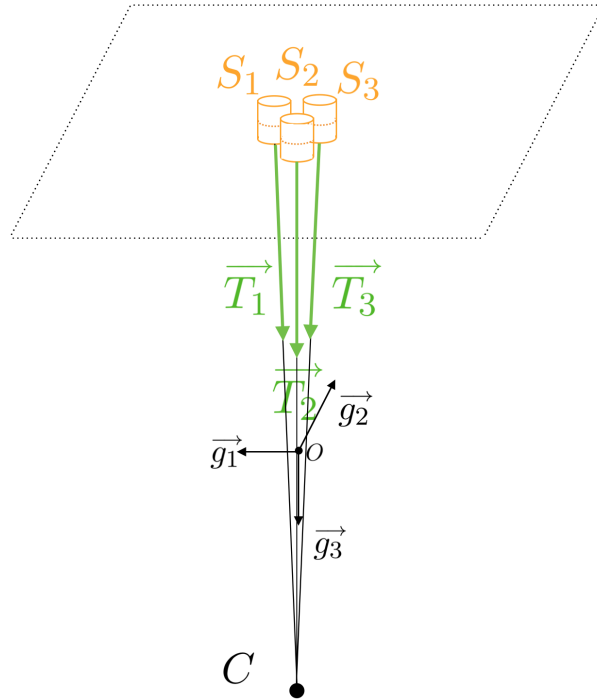


FIGURE 2.2 – Tensions des câbles du satellite principal subies par les satellites adjoints en équilibre

Chapitre 3

Découplage et stabilité

Sommaire

3.1	Découplage en trois groupes indépendants	37
3.2	Equation du mouvement du centre de masse du système	38
3.3	Mouvement relatif entre le satellite principal et le centre de masse des satellites adjoints	40
3.3.1	Equations du mouvement	40
3.3.2	Stabilité du mouvement	42
3.4	Mouvement relatif entre les satellites adjoints	46
3.4.1	Equations du mouvement	46
3.4.2	Stabilité du mouvement	48
3.4.3	Fréquence d'oscillation du mouvement en x et z	49

Dans ce troisième chapitre, le découplage et la stabilité du système d'équations du mouvement autour de l'équilibre du chapitre précédent sont détaillés. Tout d'abord, nous découplons les deux systèmes d'équations proches de l'équilibre du satellite principal et des satellites adjoints de trois manières différentes. Premièrement l'équation du mouvement du centre de masse du système est calculée. Deuxièmement, nous développons les équations du mouvement relatif entre le satellite principal et le centre de masse des satellites adjoints. Pour en étudier la stabilité, nous introduisons le concept de critère de stabilité d'Hurwitz. Troisièmement nous développons les équations du mouvement relatif entre les satellites adjoints afin d'en étudier la stabilité ainsi que les fréquences d'oscillations en x , y et z .

3.1 Découplage en trois groupes indépendants

Dans cette section, nous introduisons trois manières différentes de découpler nos systèmes d'équations. Dans le chapitre précédent, nous avons trouvé les deux systèmes d'équations proches de l'équilibre pour le satellite principal C

$$\begin{cases} \Delta \ddot{x}_C &= 2\omega_0 \Delta \dot{z}_C - \lambda_* \frac{k}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta x_C - \Delta x_i) \\ \Delta \ddot{y}_C &= -\omega_0^2 \Delta y_C - \lambda_* \frac{k}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta y_C - \Delta y_i) \\ \Delta \ddot{z}_C &= -2\omega_0 \Delta \dot{x}_C + 3\omega_0^2 \Delta z_C - \frac{k}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta z_C - \Delta z_i) - \frac{b}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta z_C - \Delta z_i) \end{cases},$$

et pour les satellites adjoints S_i , $i = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} \Delta \ddot{x}_i &= 2\omega_0 \Delta \dot{z}_i + \lambda_* \frac{k}{m_S} (\Delta x_C - \Delta x_i) \\ \Delta \ddot{y}_i &= -\omega_0^2 \Delta y_i + \lambda_* \frac{k}{m_S} (\Delta y_C - \Delta y_i) \\ \Delta \ddot{z}_i &= -2\omega_0 \Delta \dot{x}_i + 3\omega_0^2 \Delta z_i + \frac{k}{m_S} (\Delta z_C - \Delta z_i) + \frac{b}{m_S} (\Delta z_C - \Delta z_i) \end{cases}.$$

Ces deux systèmes peuvent être découplés de trois manières différentes. Pour ce faire, prenons des combinaisons linéaires appropriées, séparément pour x , y , et z . Nous développons les trois méthodes

- en prenant la somme de l'équation du mouvement du satellite principal muni du poids associé m_C avec toutes les équations respectives des satellites adjoints munies des poids m_S . Nous utilisons le vecteur \vec{s} dans la section 3.2, où

$$\vec{s} = \frac{1}{Nm_S + m_C} \left(m_C \Delta \vec{r}_C + m_S \sum_{i=1}^N \Delta \vec{r}_i \right), \quad (3.1)$$

ce qui peut également être vu comme l'équation du centre de masse du système tout entier.

- en prenant la somme des équations des satellites adjoints munis de coefficients $\frac{1}{N}$ et en y soustrayant l'équation du satellite principal. Nous utilisons le vecteur \vec{s} dans la section 3.3, où

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \vec{r}_i - \Delta \vec{r}_C, \quad (3.2)$$

qui peut être vue également comme la description du mouvement relatif entre le satellite principal et le centre de masse des satellites adjoints.

- en prenant toutes les combinaisons linéaires d'équations pour des satellites adjoints avec

des coefficients σ_i tels que

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i = 0 \quad (3.3)$$

nous obtenons un triplet d'équations scalaires \vec{s} que nous utilisons dans la section 3.4

$$\vec{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta \vec{r}_i. \quad (3.4)$$

3.2 Equation du mouvement du centre de masse du système

Le mouvement du centre de masse du système est décrit par les équations de HCW. Dans cette section, nous allons développer l'équation donnée en (3.1) afin de prouver que nous retrouvons bien les équations de HCW dont la partie de "tension" est linéarisée. Pour ce faire, repartons de l'équation (3.1) et exprimons la de la manière suivante

$$\frac{1}{Nm_S + m_C} \left(m_C \Delta \vec{r}_C + m_S \sum_{i=1}^N \Delta \vec{r}_i \right) = \vec{s}.$$

où le vecteur \vec{s} exprimé dans la base e correspond aux trois composantes x , y et z

$$\vec{s} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3.$$

Notons M la masse totale du système, ce qui revient à dire que $M = Nm_S + m_C$. Développons alors successivement les composantes \ddot{x} , \ddot{y} et \ddot{z} . Tout d'abord,

$$\ddot{x} = \frac{m_C}{M} \Delta \ddot{x}_C + \frac{m_S}{M} \sum_{i=1}^N \Delta \ddot{x}_i.$$

Utilisons à présent la composante x des équations des petits déplacements du satellite principal et des satellites adjoints donnés en (2.12) et (2.14) afin d'obtenir que

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{m_C}{M} \left[2\omega_0 \Delta \dot{z}_C - \lambda_* \frac{k}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta x_C - \Delta x_i) \right] + \frac{m_S}{M} \sum_{i=1}^N \left[2\omega_0 \Delta \dot{z}_i + \lambda_* \frac{k}{m_S} (\Delta x_C - \Delta x_i) \right] \\ &= 2\omega_0 \frac{m_C}{M} \Delta \dot{z}_C - \lambda_* \frac{k}{M} \sum_{i=1}^N (\Delta x_C - \Delta x_i) + 2\omega_0 \frac{m_S}{M} \sum_{i=1}^N \Delta \dot{z}_i + \lambda_* \frac{k}{M} \sum_{i=1}^N (\Delta x_C - \Delta x_i) \\ &= 2\omega_0 \frac{1}{M} \left(m_C \Delta \dot{z}_C - m_S \sum_{i=1}^N \Delta \dot{z}_i \right) \\ &= 2\omega_0 \dot{z}. \end{aligned}$$

Ensuite, en suivant le même raisonnement pour la composante y , nous avons que

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= \frac{m_C}{M} \Delta \ddot{y}_C + \frac{m_S}{M} \sum_{i=1}^N \Delta \ddot{y}_i \\
\ddot{y} &= \frac{m_C}{M} \left[-\omega_0^2 \Delta y_C - \lambda_* \frac{k}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta y_C - \Delta y_i) \right] + \frac{m_S}{M} \sum_{i=1}^N \left[-\omega_0^2 \Delta y_i + \lambda_* \frac{k}{m_S} (\Delta y_C - \Delta y_i) \right] \\
&= -\omega_0^2 \frac{m_C}{M} \Delta y_C - \lambda_* \frac{k}{M} \sum_{i=1}^N (\Delta y_C - \Delta y_i) - \omega_0^2 \frac{m_S}{M} \sum_{i=1}^N \Delta y_i + \lambda_* \frac{k}{M} \sum_{i=1}^N (\Delta y_C - \Delta y_i) \\
&= -\omega_0^2 \frac{1}{M} \left(m_C \Delta y_C - m_S \sum_{i=1}^N \Delta y_i \right) \\
&= -\omega_0^2 y.
\end{aligned}$$

Enfin, nous avons pour la composante z que

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= \frac{m_C}{M} \Delta \ddot{z}_C + \frac{m_S}{M} \sum_{i=1}^N \Delta \ddot{z}_i \\
\ddot{z} &= \frac{m_C}{M} \left[-2\omega_0 \Delta \dot{x}_C + 3\omega_0^2 \Delta z_C - \frac{k}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta z_C - \Delta z_i) - \frac{b}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta z_C - \Delta z_i) \right] \\
&\quad + \frac{m_S}{M} \sum_{i=1}^N \left[-2\omega_0 \Delta \dot{x}_i + 3\omega_0^2 \Delta z_i + \frac{k}{m_S} (\Delta z_C - \Delta z_i) + \frac{b}{m_S} (\Delta z_C - \Delta z_i) \right] \\
&= -2\omega_0 \dot{x} + 3\omega_0^2 z.
\end{aligned}$$

Nous obtenons les équations de HCW suivantes

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega_0 \dot{z} \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y \\ \ddot{z} = -2\omega_0 \dot{x} + 3\omega_0^2 z \end{cases}.$$

où les composantes x et y sont couplées, où la composante en y est effectivement autonome et décrit des oscillations de fréquences ω_0 .

3.3 Mouvement relatif entre le satellite principal et le centre de masse des satellites adjoints

Dans cette section, nous allons développer l'équation donnée en (3.2) afin de développer les équations du mouvement relatif entre le satellite principal et le centre de masse des satellites adjoints. Ensuite, nous étudierons la stabilité d'un tel mouvement.

3.3.1 Equations du mouvement

Notons x , y et z les composantes scalaires de l'expression (3.2),

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \vec{r}_i - \Delta \vec{r}_C = \vec{s}.$$

où le vecteur \vec{s} exprimé dans la base e correspond aux trois composantes x , y et z

$$\vec{s} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Développons successivement les composantes \ddot{x} , \ddot{y} et \ddot{z} en utilisant le même raisonnement que celui présenté dans la section précédente. Tout d'abord, pour la composante x , nous remarquons

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \ddot{x}_i - \Delta \ddot{x}_C \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[2\omega_0 \Delta \dot{z}_i + \lambda_* \frac{k}{m_S} (\Delta x_C - \Delta x_i) \right] - \left[2\omega_0 \Delta \dot{z}_C - \lambda_* \frac{k}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta x_C - \Delta x_i) \right] \\ &= 2\omega_0 \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \dot{z}_i - \Delta \dot{z}_C \right)}_{\substack{= \dot{z} \\ (3.2)}} + \lambda_* k \left[\frac{1}{Nm_S} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \Delta x_C - \sum_{i=1}^N \Delta x_i \right)}_{= N \Delta x_C} + \frac{1}{m_C} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \Delta x_C - \sum_{i=1}^N \Delta x_i \right)}_{= N \Delta x_C} \right] \\ &= 2\omega_0 \dot{z} + \lambda_* k \left[\underbrace{\frac{1}{m_S} \left(\Delta x_C - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \right)}_{\substack{= -x \\ (3.2)}} + \underbrace{\frac{N}{m_C} \left(\Delta x_C - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \right)}_{\substack{= -x \\ (3.2)}} \right] \\ &= 2\omega_0 \dot{z} + \lambda_* k x \left(\frac{1}{m_S} + \frac{N}{m_C} \right). \end{aligned}$$

Afin de simplifier au maximum l'expression ci-dessus, utilisons l'expression de la masse

$$m_r = \frac{m m_C}{Nm + m_C}$$

de la manière suivante

$$\frac{1}{m_S} + \frac{N}{m_C} = \frac{m_C + Nm_S}{m_S m_C} = \frac{1}{m_r}.$$

Nous avons alors que

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega_0 \dot{z} - \frac{\lambda^* k}{m_r} x \\ &\stackrel{(3.11)}{=} 2\omega_0 \dot{z} - 3\omega_0^2 x. \end{aligned}$$

À présent intéressons-nous à la composante en y en suivant toujours le même raisonnement.

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \ddot{y}_i - \Delta \ddot{y}_C \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[-\omega_0^2 \Delta y_i + \lambda_* \frac{k}{m_S} (\Delta y_C - \Delta y_i) \right] - \left[-\omega_0^2 \Delta y_C - \lambda_* \frac{k}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta y_C - \Delta y_i) \right] \\ &= -\omega_0^2 \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta y_i - \Delta y_C \right)}_{\stackrel{(3.2)}{=} y} + \lambda_* k \left[\frac{1}{Nm_S} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \Delta y_C - \sum_{i=1}^N \Delta y_i \right)}_{=N\Delta y_C} + \frac{1}{m_C} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \Delta y_C - \sum_{i=1}^N \Delta y_i \right)}_{=N\Delta y_C} \right] \\ &= -\omega_0^2 y + \left[\frac{1}{m_S} \underbrace{\left(\Delta y_C - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta y_i \right)}_{\stackrel{(3.2)}{=} -y} + \frac{N}{m_C} \underbrace{\left(\Delta y_C - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta y_i \right)}_{\stackrel{(3.2)}{=} -y} \right] \\ &= -\omega_0^2 y - \lambda^* k y \left(\frac{1}{m_S} \frac{N}{m_C} \right) \\ &= -\omega_0^2 y - \lambda^* \frac{k}{m_r} y \\ &= -4\omega_0^2 y. \end{aligned}$$

Pour finir, penchons-nous sur la dernière composante en z

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \ddot{z}_i - \Delta \ddot{z}_C \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[-2\omega_0 \Delta \dot{x}_i + 3\omega_0^2 \Delta z_i + \frac{k}{m_S} (\Delta z_C - \Delta z_i) + \frac{b}{m_S} (\Delta z_C - \Delta z_i) \right] \\
&\quad - \left[-2\omega_0 \Delta \dot{x}_C + 3\omega_0^2 \Delta z_C - \frac{k}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta z_C - \Delta z_i) - \frac{b}{m_C} \sum_{i=1}^N (\Delta z_C - \Delta z_i) \right] \\
&= -2\omega_0 \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \dot{x}_i - \Delta \dot{x}_C \right)}_{\stackrel{(3.2)}{=} \dot{x}} + 3\omega_0^2 \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta z_i - \Delta z_C \right)}_{\stackrel{(3.2)}{=} z} + k \left(\frac{1}{m_S} + \frac{N}{m_C} \right) \underbrace{\left(\Delta z_C - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta z_i \right)}_{\stackrel{(3.2)}{=} -z} \\
&\quad + b \left(\frac{1}{m_S} + \frac{N}{m_C} \right) \underbrace{\left(\Delta \dot{z}_C - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \dot{z}_i \right)}_{\stackrel{(3.2)}{=} -\dot{z}} \\
&= -2\omega_0 \dot{x} + 3\omega_0^2 z - \frac{k}{m_r} z - \frac{b}{m_r} \dot{z}.
\end{aligned}$$

Nous trouvons alors les trois composantes des équations du mouvement relatif entre le satellite principal et le centre de masse des satellites adjoints suivantes

$$\begin{cases} \ddot{x} &= 2\omega_0 \dot{z} - 3\omega_0^2 x \\ \ddot{y} &= -4\omega_0^2 y \\ \ddot{z} &= -2\omega_0 \dot{x} + 3\omega_0^2 z - \frac{k}{m_r} z - \frac{b}{m_r} \dot{z} \end{cases}.$$

Comme prévu, l'équation pour y est indépendante des équations de x , z . De plus, elle décrit les oscillations harmoniques avec la fréquence $2\omega_0$.

3.3.2 Stabilité du mouvement

Afin d'étudier la stabilité linéaire du mouvement, analysons les équations restantes pour x et z en considérant le système de premier ordre suivant

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega_0 & 3\omega_0^2 - \frac{k}{m_r} & -\frac{b}{m_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \\ \dot{z} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Notons A_1 la matrice située à droite dans le système (3.5). Examinons à présent la propriété de stabilité de ce système, en écrivant l'équation caractéristique $\det(A_1 - \rho I_4)$ où I_4 est la matrice identité du 4^{ème} ordre. Afin de calculer ce déterminant, rappelons alors le théorème de Binet-Cauchy pour des matrices carrées de dimensions 4×4 et le calcul classique 3×3 .

Définition 1 *Le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $n = 4$ est donné par*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Définition 2 *Le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $n = 3$ est donné par la méthode suivante*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & + & + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{vmatrix} \\ - & - & - \end{array} \end{array}$$

Nous avons donc que

$$\begin{aligned} \det(A_1 - \rho I_4) &= \begin{vmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 \\ -3\omega_0^2 & -\rho & 0 & 2\omega_0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 \\ 0 & -2\omega_0 & 3\omega_0^2 - \frac{k}{m_r} & \frac{-b}{m_r} - \rho \end{vmatrix} \\ &= -\rho \begin{vmatrix} -\rho & 0 & 2\omega_0 \\ 0 & -\rho & 1 \\ -2\omega_0 & -3\omega_0^2 - \frac{k}{m_r} & -\frac{b}{m_r} - \rho \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3\omega_0^2 & 0 & 2\omega_0 \\ 0 & -\rho & 1 \\ 0 & 3\omega_0^2 - \frac{k}{m_r} & \frac{-b}{m_r} - \rho \end{vmatrix} + 0 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\rho \left[\rho^2 \left(\frac{-b}{m_r} - \rho \right) + 4\omega_0^2 \rho + \rho \left(3\omega_0^2 - \frac{k}{m_r} \right) \right] - \left[3\omega_0^2 \rho \left(\frac{-b}{m_r} - \rho \right) - 3\omega_0^2 \left(3\omega_0^2 - \frac{k}{m_r} \right) \right] \\
&= \frac{\rho^3 b}{m_r} + \rho^4 + 4\omega_0^2 \rho^2 - 3\omega - 2\rho^2 + \frac{k}{m_r} \rho^2 + 3\omega_0^2 \rho \frac{b}{m_r} + \rho^2 3\omega - 9\omega_0^4 + \frac{3\omega_0^2 k}{m_r} \\
&= \rho^4 + \frac{b}{m_r} \rho^3 + \left(\frac{k}{m_r} + 4\omega_0^2 \right) \rho^2 + \frac{3b\omega_0^2}{m_r} \rho + 3\omega_0^2 \left(\frac{k}{m_r} - 3\omega_0^2 \right). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

A présent, introduisons la définition du critère de stabilité d'Hurwitz¹.

Définition 3 *Un polynôme à coefficients réels est Hurwitz si et seulement s'il admet des racines à parties réelles strictement négatives. Formellement, notons ce polynôme $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}$, avec $a_0 > 0$.*

$P(z)$ est Hurwitz $\Leftrightarrow \forall i = 1 \dots n$, les mineurs principaux Δ_i sont strictement positifs avec

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & & \vdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{i+1} & a_i \end{vmatrix}.$$

Reprenons le déterminant obtenu en (3.6) et analysons les mineurs principaux afin de vérifier qu'ils soient tous strictement positifs. Tout d'abord, remarquons que la masse relative m_r ainsi que le coefficient d'élasticité k sont tous deux strictement positifs, ce qui nous permet de vérifier que le signe des termes a_i , $\forall i = 0, \dots, 4$ est strictement positif sous les hypothèses de la condition du coefficient d'élasticité du câble k donnée en (1.37) et que $b > 0$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 > 0 \\
a_1 &= \frac{b}{m_r} > 0 \\
a_2 &= \frac{k}{m_r} + 4\omega_0^2 > 0 \\
a_3 &= \frac{3b\omega_0^2}{m_r} > 0 \\
a_4 &= 3\omega_0^2 \underbrace{\left(\frac{k}{m_r} - 3\omega_0^2 \right)}_{>0 \text{ par (1.37)}} > 0
\end{aligned}$$

1. Définition provenant de [19]

Il est alors plus facile d'étudier la positivité des mineurs principaux Δ_i , $\forall i = 1, \dots, 4$,

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= a_1 \\
&= \frac{b}{m_r} > 0 \\
\\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \\
&= a_1 a_2 - a_0 a_3 \\
&= \frac{b}{m_r} \left(\frac{k}{m_r} + 4\omega_0^2 \right) - \frac{3b\omega^2}{m_r} \\
&= \frac{bk}{m_r^2} + 4\frac{b}{m_r}\omega_0^2 - 3\frac{b}{m_r}\omega_0^2 \\
&= \frac{bk}{m_r^2} + \frac{b}{m_r}\omega_0^2 > 0 \\
\\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \\
&= a_1 a_2 a_3 + 0 + 0 - 0 - a_4 a_1^2 - a_0 a_3^2 \\
&= \frac{b}{m_r} \left(\frac{k}{m_r} + 4\omega_0^2 \right) \frac{3b\omega_0^2}{m_r} - 3\omega_0^2 \left(\frac{k}{m_r} - 3\omega_0^2 \right) \frac{b^2}{m_r^2} - \frac{9b^2\omega_0^4}{m_r^2} \\
&= \frac{3b^2\omega_0^2}{m_r^2} \frac{k}{m_r} + \frac{3b^2\omega_0^2}{m_r^2} 4\omega_0^2 - \frac{3b^2\omega_0^2}{m_r^2} \frac{k}{m_r} + 9\omega_0^4 \frac{b^2}{m_r^2} - 9\omega_0^4 \frac{b^2}{m_r^2} \\
&= \frac{12b^2\omega^2}{m_r^2} > 0 \\
\\
\Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \\
&= a_4 \Delta_3 \\
&= 3\omega_0^2 \underbrace{\left(\frac{k}{m_r} - 3\omega_0^2 \right)}_{>0 \text{ par (1.37)}} \Delta_3 > 0
\end{aligned}$$

Toutes les valeurs propres ρ de A sont à parties réelles strictement négatives si, et seulement si, la condition d'élasticité (1.37) donnée à la page 26 est vérifiée et si $b > 0$. Nous avons donc que le mouvement tend à revenir à l'équilibre sous la condition que la corde soit assez rigide.

Pour résumer, dans l'hypothèse de stabilité (1.37) le centre de masse des satellites adjoints oscille par rapport au satellite principal. Dans l'approximation linéaire, la dissipation d'énergie dans les câbles n'affecte pas les oscillations sur l'axe des y . Le centre de masse des satellites adjoints effectue alors des oscillations indépendantes.

3.4 Mouvement relatif entre les satellites adjoints

Dans cette section nous allons développer l'équation donnée en (3.4) afin de développer les équations du mouvement relatif entre les satellites adjoints. Ensuite, nous étudierons la stabilité d'un tel mouvement.

3.4.1 Equations du mouvement

Dans cette section nous allons développer l'équation donnée en (3.4) afin de développer les équations du mouvement relatif entre les satellites adjoints. Notons x , y et z les composantes scalaires de l'expression (3.4),

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta \vec{r}_i = \vec{s}.$$

où le vecteur \vec{s} exprimé dans la base e correspond à nouveau aux trois composantes x , y et z . Développons successivement les composantes \ddot{x} , \ddot{y} et \ddot{z} en utilisant les équations des petits déplacements des satellites adjoints donnés en (2.14). Tout d'abord, pour la composante x , nous remarquons que

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta \ddot{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \sigma_i \left[2\omega \Delta \dot{z}_i + \lambda_* \frac{k}{m_S} (\Delta x_C - \Delta x_i) \right] \\ &= 2\omega_0 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta \dot{z}_i \right)}_{\substack{= \dot{z} \\ (3.4)}} + \lambda_* \frac{k}{m_S} \left[\underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right)}_{\substack{= 0 \\ (3.3)}} \Delta x_C - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i x_i \right)}_{\substack{= x \\ (3.4)}} \right] \\ &= 2\omega_0 \dot{z} - \lambda_* \frac{k}{m_S} x. \end{aligned}$$

Ensuite, pour la composante y nous avons que

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= \sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta \ddot{y}_i \\
&= \sum_{i=1}^N \sigma_i \left[-\omega_0^2 \Delta y_i + \lambda_* \frac{k}{m_S} (\Delta y_C - \Delta y_i) \right] \\
&= -\omega_0^2 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta y_i \right)}_{\substack{= \dot{y} \\ (3.4)}} + \lambda_* \frac{k}{m_S} \left[\underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right)}_{\substack{= 0 \\ (3.3)}} \Delta y_C - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i x_i \right)}_{\substack{= y \\ (3.4)}} \right] \\
&= -\omega_0^2 y - \lambda_* \frac{k}{m_S} y.
\end{aligned}$$

Enfin, la composante en z peut s'écrire comme

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= \sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta \ddot{z}_i \\
&= \sum_{i=1}^N \sigma_i \left[-2\omega_0 \Delta \dot{x}_i + 3\omega_0^2 \Delta z_i + \frac{k}{m_S} (\Delta z_C - \Delta z_i) + \frac{b}{m_S} (\Delta z_C - \Delta z_i) \right] \\
&= -2\omega_0 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta \dot{x}_i \right)}_{\substack{= \dot{x} \\ (3.4)}} + 3\omega_0^2 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta z_i \right)}_{\substack{= z \\ (3.4)}} + \frac{k}{m_S} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right)}_{\substack{= 0 \\ (3.3)}} \Delta z_C - \frac{k}{m_S} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta z_i \right)}_{\substack{= z \\ (3.4)}} \\
&\quad + \frac{b}{m_S} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right)}_{\substack{= 0 \\ (3.3)}} \Delta z_C - \frac{b}{m_S} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta z_i \right)}_{\substack{= z \\ (3.4)}} \\
&= -2\omega_0 \dot{x} + 3\omega_0^2 z - \frac{k}{m_S} z - \frac{b}{m_S} \dot{z}.
\end{aligned}$$

Nous retrouvons alors les trois composantes des équations du mouvement relatif entre le satellite principal et le centre de masse des satellites adjoints suivantes

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega_0 \dot{z} - \lambda_* \frac{k}{m_S} x \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y - \lambda_* \frac{k}{m_S} y \\ \ddot{z} = -2\omega_0 \dot{x} + 3\omega_0^2 z - \frac{k}{m_S} z - \frac{b}{m_S} \dot{z} \end{cases}.$$

L'équation pour la composante en y décrit les oscillations avec une fréquence

$$\omega_y = \sqrt{\omega_0^2 + \lambda_* \frac{k}{m_S}}.$$

En reprenant la définition introduite au point (3.11)

$$\lambda_* = \frac{3\omega_0^2}{k} \frac{m_S m_C}{Nm_S + m_C},$$

il est possible de réécrire la composante en y de la fréquence en fonction des masses du système uniquement

$$\begin{aligned} \omega_y &= \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3\omega_0^2}{k} \frac{m_S m_C}{Nm_S + m_C} \frac{k}{m_S}} \\ &= \sqrt{\omega_0^2 \left(1 + \frac{3m_C}{Nm_S + m_C}\right)} \\ &= \omega_0 \sqrt{\frac{4m_C + Nm_S}{m_C + Nm_S}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.4.2 Stabilité du mouvement

Afin d'étudier la stabilité d'un tel mouvement, analysons les équations restantes en x et z en considérant le système de premier ordre suivant

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_* \frac{k}{m_S} & 0 & 0 & 2\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega_0 & 3\omega_0^2 - \frac{k}{m_S} & \frac{-b}{m_S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \\ \dot{z} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Notons A_2 la matrice située à droite dans le système (3.8). Examinons à présent la propriété de stabilité de ce système, en écrivant à nouveau l'équation caractéristique $\det(A_2 - \rho I_4)$ de la même manière que pour les équations de la section 1 page 43. Nous obtenons alors que

$$\det(A_2 - \rho I_4) = \rho^4 + \frac{b}{m_S} \rho^3 + \left(\frac{(\lambda_* + 1)k}{m_S} + \omega_0^2 \right) \rho^2 + \frac{\lambda_* k b}{m_S^2} \rho + \frac{\lambda_* k}{m_S} \left(\frac{k}{m_S} - 3\omega_0^2 \right). \quad (3.9)$$

En appliquant à nouveau le critère de stabilité d'Hurwitz, nous remarquons que le système (3.8) est asymptotiquement stable si et seulement si $b > 0$ et

$$k \geq 3\omega_0^2 m_S. \quad (3.10)$$

Si la condition (3.10) est remplie mais que la dissipation est absente ($b = 0$), le spectre de A_2 est purement imaginaire.

Si la condition n'est pas remplie, la matrice A_2 a une valeur propre positive. Notons que cette condition de stabilité est plus forte que la condition précédente donnée en (1.37).

3.4.3 Fréquence d'oscillation du mouvement en x et z

A présent calculons la fréquence d'oscillation du mouvement selon la composante en x et z . Pour ce faire, repartons du déterminant du système de premier ordre repris en (3.9) et supposons que $b = 0$, dans la limite d'une grande rigidité k . Nous obtenons alors que

$$\rho^4 + \left[\frac{\lambda_* k}{m_S} + \frac{k}{m_S} + \omega_0^2 \right] \rho^2 + \left[\frac{\lambda_* k^2}{m_S^2} - \frac{3\lambda_* k \omega_0^2}{m_S} \right] = 0$$

où

$$\lambda_* = \frac{3\omega_0^2}{k} m_r \quad \text{ou} \quad \lambda_* k = 3\omega_0^2 m_r. \quad (3.11)$$

Nous avons alors que

$$\rho^4 + \underbrace{\left[3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} + \frac{k}{m_S} + \omega_0^2 \right]}_{:=B} \rho^2 + \underbrace{\left[3\omega_0^2 \frac{m_r k}{m_S^2} - \frac{9\omega_0^4}{m_S} m_r \right]}_{:=C} = 0.$$

La solution de cette équation d'ordre 4 est donnée par l'expression suivante

$$2\rho^2 = -B \pm \sqrt{B^2 - 4C}, \quad (3.12)$$

où B et C peuvent être réécrits comme

$$B = \frac{k}{m_S} + \alpha \quad \text{et} \quad C = \frac{k}{m_S} \beta - \gamma.$$

Afin de calculer la valeur de ρ , détaillons successivement B^2 , $B^2 - 4C$, $\sqrt{B^2 - 4C}$

$$B^2 = \frac{k^2}{m_S^2} + \alpha^2 + \frac{2k\alpha}{m_S},$$

$$\begin{aligned} B^2 - 4C &= \frac{k^2}{m_S^2} + \alpha^2 + \frac{2k\alpha}{m_S} - 4\beta \frac{k}{m_S} - 4\gamma \\ &= \frac{k^2}{m_S^2} + \frac{k}{m_S} (2\alpha - 4\beta) + \alpha^2 + 4\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{B^2 - 4C} &= \frac{k}{m_S} \left[1 + \frac{m_S}{k} (2\alpha - 4\beta) + \frac{m_S^2}{k^2} (\alpha^2 + 4\gamma) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{k}{m_S} \left[1 + \frac{m_S}{k} (2\alpha - 4\beta) \frac{1}{2} + \frac{m_S^2}{k^2} (\alpha^2 + 4\gamma) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{m_S^2}{k^2} (2\alpha - 4\beta)^2 \right] \\
&= \frac{k}{m_S} \left[1 + \frac{m_S}{k} (\alpha - 2\beta) + \frac{m_S^2}{k^2} \frac{1}{2} (4\gamma - 4\beta^2 + 4\alpha\beta) \right]
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\alpha &= \omega_0^2 + 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} = \omega_0^2 + \beta \\
\beta &= 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} \\
\gamma &= 9\omega_0^4 \frac{m_r}{m_S}.
\end{aligned}$$

Tout d'abord, intéressons-nous à la première racine

$$\begin{aligned}
2\rho_1^2 &= -B + \sqrt{B^2 - 4C} \\
2\rho_1^2 &= -\frac{k}{m_S} + \alpha + \frac{k}{m_S} + \alpha - 2\beta + \frac{m_S}{k} \frac{1}{2} (4\gamma - 4\beta^2 + 4\alpha\beta) \\
\Leftrightarrow 2\rho_1^2 &= -2\beta + \frac{1}{2} \frac{m_S}{k} (4\gamma - 4\beta^2 + 4\alpha\beta) \\
\Leftrightarrow \rho_1^2 &= -\beta + \frac{m_S}{k} (\gamma - \beta^2 + \alpha\beta).
\end{aligned}$$

Cette première racine est de la forme

$$\rho_1^2 = i^2 \omega_x^2.$$

Développons alors chaque partie de l'égalité en remplaçant α , β et γ afin d'isoler ω_x ,

$$\begin{aligned}
\rho_1^2 &= i^2 \omega_x^2 \\
\Leftrightarrow \omega_x^2 &= -\rho_1^2 \\
\Leftrightarrow \omega_x^2 &= 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} - \frac{m_S}{k} \left[9\omega_0^4 \frac{m_r}{m_S} - \beta^2 + (\omega_0^2 + \beta) \beta \right] \\
\Leftrightarrow \omega_x^2 &= 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} - \frac{m_S}{k} \left[9\omega_0^4 \frac{m_r}{m_S} + \omega_0^2 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} \right] \\
\Leftrightarrow \omega_x^2 &= 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} - 12\omega_0^4 \frac{m_r}{m_S} \frac{m_S}{k} \\
\Leftrightarrow \omega_x^2 &= 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} \left(1 - 4\omega_0^2 \frac{m_S}{k} \right) \\
\Leftrightarrow \omega_x &= \omega_0 \sqrt{\frac{3m_r}{m_S}} \left(1 - \frac{1}{2} 4\omega_0^2 \frac{m_S}{k} + \mathcal{O}(k^{-2}) \right).
\end{aligned}$$

Afin de simplifier au maximum l'expression ci-dessus, utilisons l'expression de λ^* décrite en 3.11 afin d'obtenir que

$$\omega_x = \sqrt{\frac{\lambda_* k}{m_S}} \left(1 - 2 \frac{m_S \omega_0^2}{k} + \mathcal{O}(k^{-2}) \right).$$

Ensuite, intéressons-nous à la deuxième racine

$$\begin{aligned} 2\rho_2^2 &= -B - \sqrt{B^2 - 4C} \\ 2\rho_2^2 &= -\frac{k}{m_S} + \alpha - \frac{k}{m_S} \left[1 + \frac{m_S}{k} (\alpha - 2\beta) + \frac{m_S^2}{k^2} \frac{1}{2} (4\gamma - 4\beta^2 + 4\alpha\beta) \right] \\ \Leftrightarrow 2\rho_2^2 &= -\frac{k}{m_S} - \alpha + \beta - \frac{m_S}{k} (\gamma - \beta^2 + \alpha\beta). \end{aligned}$$

Cette deuxième racine est de la forme

$$\rho_2^2 = i^2 \omega_z^2.$$

Développons alors chaque partie de l'égalité en remplaçant α , β et γ afin d'isoler ω_x ,

$$\begin{aligned} \rho_2^2 &= i^2 \omega_z^2 \\ \Leftrightarrow \omega_z^2 &= -\rho_2^2 \\ \Leftrightarrow \omega_z^2 &= \frac{k}{m_S} + \omega_0^2 + \frac{m_S}{k} 12\omega_0^4 \frac{m_r}{m_S} \\ \Leftrightarrow \omega_z &= \frac{k}{m_S} \left(1 + \omega_0^2 \frac{m_S}{k} + \frac{m_S^2}{k^2} 12\omega_0^4 \frac{m_r}{m_S} \right) \\ \Leftrightarrow \omega_z &= \sqrt{\frac{k}{m_S}} \left(1 + \frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{m_S}{k} + \mathcal{O}(k^{-2}) \right). \end{aligned}$$

La dynamique linéarisée de Δx , Δz se découple donc approximativement en oscillations indépendantes de Δx et Δz avec des fréquences

$$\begin{aligned} \omega_x &= \sqrt{\frac{\lambda_* k}{m_S}} \left(1 - 2 \frac{m_S \omega_0^2}{k} + \mathcal{O}(k^{-2}) \right) \\ &= \sqrt{\frac{3m_C}{m_C + Nm_S}} \left(1 - 2 \frac{m_S \omega_0^2}{k} + \mathcal{O}(k^{-2}) \right) \omega_0 \\ \omega_z &= \sqrt{\frac{k}{m_S}} \left(1 + \frac{m_S \omega_0^2}{2k} + \mathcal{O}(k^{-2}) \right). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Mouvement des satellites adjoints le long les courbes de Lissajous

Sommaire

4.1	Courbes de Lissajous	53
4.2	Formations équilibrées évitant les collisions	56
4.2.1	Conditions de formation de satellites adjoints le long des courbes de Lissajous	56
4.2.2	Arrangement uniforme de satellites adjoints : Type I	57
4.2.3	Arrangement uniforme de satellites adjoints : Type II	57
4.2.4	Propriétés des formations de type I et II	57
4.2.5	Simulations numériques	67
4.3	Enchevêtrement des câbles	69
4.4	Théorie de perturbation de second ordre	81

Dans ce quatrième chapitre une étude approfondie du mouvement des satellites adjoints est détaillée. Tout d'abord, la notion de courbe de Lissajous ainsi que le mouvement des satellites adjoints le long de celles-ci sont étudiés. Ensuite, nous envisageons des formations équilibrées évitant les collisions en détaillant les conditions nécessaires à de telles configurations. Nous étudions également deux arrangements uniformes de satellites adjoints ainsi que leurs propriétés associées. La preuve de cette proposition est également longuement détaillée. Après, des simulations numériques sont proposées afin de représenter le mouvement des satellites adjoints le long des courbes de Lissajous selon différents jeux de paramètres. Ensuite, la possibilité d'enchevêtrement des câbles selon ces derniers paramètres est envisagée. Pour finir, nous étudions les effets de non linéarité du mouvement des satellites adjoints le long des courbes de Lissajous en nous intéressant à la théorie du second ordre.

4.1 Courbes de Lissajous

Dans cette section, nous étudions la possibilité que les satellites se déplacent de manière à ce que les éléments du système (satellites et câbles) ne se heurtent jamais. Nous présentons alors les courbes de Lissajous décrivant la trajectoire des satellites adjoints ainsi que leur fréquence. Étant donné l'hypothèse de faibles déviations par rapport à l'équilibre vertical que nous avons posée, nous la reformulons ici comme l'exigence que les projections (x_i, y_i) , $\forall i = 1, \dots, N$ des satellites adjoints sur le plan VHL ne se rapprochent jamais les uns des autres, comme représenté sur la Figure 4.1. Les résultats de la section 3.7 impliquent que la position d'un satellite adjoint par rapport au centre de masse de tous les satellites adjoints donnée par l'expression

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Delta \vec{r}_k,$$

oscille avec une fréquence

$$\omega_y = \omega_0 \sqrt{\frac{4m_C + Nm_S}{m_C + Nm_S}} \quad (4.1)$$

dans la direction y et pour des câbles suffisamment rigides avec une fréquence

$$\omega_x \simeq \omega_0 \sqrt{\frac{3m_C}{m_C + Nm_S}}. \quad (4.2)$$

Comme mentionné dans la section 3.3.2 le centre de masse des satellites adjoints défini par

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \vec{r}_k,$$

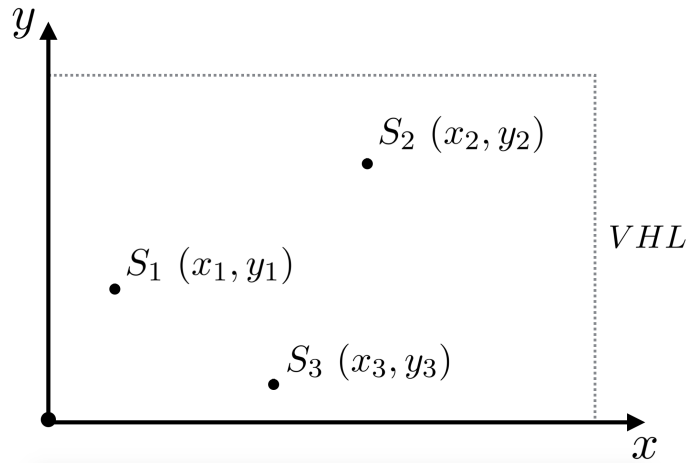


FIGURE 4.1 – Projection du système du satellite multi-câblé dans le système de référence VHL

effectue des oscillations indépendantes. Il est donc tout-à-fait envisageable d'ignorer les oscillations momentanément et de supposer sans perdre de généralité que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k = 0.$$

Par linéarité, pour chaque paire (i, j) de satellites adjoints, leur position relative $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ oscille également avec les mêmes fréquences ω_x et ω_y . Si ces deux fréquences ne sont pas proportionnelles, c'est-à-dire si $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ est irrationnel, alors la trajectoire de l'oscillation est apériodique et se rapproche de l'origine de façon arbitraire, c'est-à-dire que les deux satellites se rapprochent. Afin de ne pas violer l'hypothèse que les projections (x_i, y_i) , $\forall i = 1, \dots, N$ des satellites adjoints sur le plan VHL ne se rapprochent jamais les uns des autres, nous sommes alors amenés à considérer des oscillations commensurales. De telles oscillations sont caractérisées par le fait que

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{p}{q} \quad (4.3)$$

où p et q sont des nombres naturels premiers entre eux.

Définition 4 Deux nombres naturels a et b sont premiers entre eux si et seulement si leur plus grand commun diviseur est égal à 1.

Nous avons alors que $\frac{p}{q}$ est rationnel. Dans ce cas, les deux oscillations ont une période commune définie par

$$T = \frac{2\pi p}{\omega_x} = \frac{2\pi q}{\omega_y}.$$

Nous pouvons également introduire une variable temporelle adimensionnelle

$$\tau = \frac{t}{T}.$$

Le mouvement d'un seul satellite adjoint peut être réécrit comme

$$\begin{cases} x &= x_0 \sin(2\pi p\tau + \psi_x) \\ y &= y_0 \sin(2\pi q\tau + \psi_y) \end{cases}. \quad (4.4)$$

de période 1 avec ψ_x et ψ_y les phases initiales. La trajectoire d'un tel mouvement est connue sous le nom de "**courbe de Lissajous**". La courbe de Lissajous est donc la trajectoire d'un point dont les composantes rectangulaires ont un mouvement sinusoïdal¹. A présent, intéressons-nous aux valeurs que peuvent prendre p et q dans le cadre de notre système de satellites multi-câblés.

1. Définition provenant de [18]

Pour ce faire, repartons de l'équation (4.3) et remplaçons le numérateur et le dénominateur par leurs expressions (4.2) et (4.2) respectives.

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{p}{q} &\Leftrightarrow \frac{\omega_0 \sqrt{\frac{3m_C}{m_C + Nm_S}}}{\omega_0 \sqrt{\frac{4m_C + Nm_S}{m_C + Nm_S}}} = \frac{p}{q} \\
&\Leftrightarrow \frac{3m_C}{m_C + Nm_S} \frac{m_C + Nm_S}{4m_C + Nm_S} = \frac{p^2}{q^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{4m_C + Nm_S}{3m_C} = \frac{q^2}{p^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{4}{3} + \frac{Nm_S}{3m_C} = \frac{q^2}{p^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{Nm_S}{3m_C} = \frac{q^2}{p^2} - \frac{4}{3} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\frac{Nm_S}{m_C}}_{>0} = \frac{3q^2}{p^2} - 4.
\end{aligned}$$

Nous avons donc que

$$\begin{aligned}
\frac{3q^2}{p^2} - 4 > 0 &\Leftrightarrow \frac{q^2}{p^2} > \frac{4}{3} \\
&\Leftrightarrow \frac{q}{p} > \frac{2}{\sqrt{3}} \\
&\Leftrightarrow \frac{p}{q} < \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Cette condition sur le rapport de p sur q exclut alors le cas d'oscillations elliptiques (ou circulaires) où $p = q = 1$.

A présent, nous sommes capables d'exprimer les fréquences en fonction de p et q uniquement.

Pour ce faire, repartons tout d'abord de l'expression de ω_y ,

$$\begin{aligned}
\omega_y &= \omega_0 \sqrt{\frac{4m_C + Nm_S}{m_C + Nm_S}} \\
&= \omega_0 \sqrt{\frac{1}{\frac{4m_C + Nm_S - 3m_C}{4m_C + Nm_S}}} \\
&= \omega_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{3m_C}{4m_C + Nm_S}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(4.5)}{=} \omega_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{p^2}{q^2}}} \\
& = \omega_0 \sqrt{\frac{q^2}{q^2 \left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right)}} \\
& = \omega_0 \frac{q}{\sqrt{q^2 - p^2}}.
\end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire, nous trouvons également que

$$\omega_x = \omega_0 \frac{p}{\sqrt{q^2 - p^2}}.$$

4.2 Formations équilibrées évitant les collisions

Dans cette section, nous recherchons tout d'abord les conditions de formations de satellites adjoints se déplaçant conformément aux courbes de Lissajous et la position d'un satellite adjoint pour les formations que nous qualifions de type I et type II. Ensuite, nous développons les propriétés dont disposent ces formations de type I et II. Pour finir, nous simulons numériquement le déplacement des satellites adjoints le long des courbes de Lissajous.

4.2.1 Conditions de formation de satellites adjoints le long des courbes de Lissajous

Détaillons les conditions de formations de satellites adjoints se déplaçant conformément aux courbes de Lissajous. Ces formations son possibles sous réserve des conditions suivantes :

(A) la disposition des satellites adjoints doit satisfaire à la condition de balance

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \equiv 0, \quad (4.5)$$

(B) les satellites ne doivent jamais entrer en collision, c'est-à-dire

$$(x_i(t), y_i(t)) \neq (x_j(t), y_j(t)),$$

pour tout t et pour tout $i \neq j$

(C) facultativement, nous pouvons souhaiter nous assurer que

$$(x_i(t), y_i(t)) = (0, 0)$$

pour tout i et t . Dans ce cas, un satellite supplémentaire peut être ajouté au centre du système "en étoile" sans collisions avec ce système.

A présent, nous considérons deux types d'arrangements uniformes de satellites adjoints : le type I et II.

4.2.2 Arrangement uniforme de satellites adjoints : Type I

Le type I est un arrangement uniforme de N satellites le long d'une seule courbe de Lissajous. La position du i -ème satellite adjoint est donnée par

$$\begin{cases} x_i(\tau) &= x_0 \sin \left[2\pi p \left(\tau + \frac{i}{N} \right) + \psi_x \right] \\ y_i(\tau) &= y_0 \sin \left[2\pi q \left(\tau + \frac{i}{N} \right) + \psi_y \right] \end{cases},$$

où ψ_x et ψ_y sont les mêmes pour tous les satellites adjoints.

4.2.3 Arrangement uniforme de satellites adjoints : Type II

Le type II est un arrangement uniforme de N satellites le long de plusieurs courbes de Lissajous. La position du i -ème satellite adjoint est donnée par

$$\begin{cases} x_i(\tau) &= x_0 \sin \left[2\pi \left(p\tau + \frac{i}{N} \right) + \psi_x \right] \\ y_i(\tau) &= y_0 \sin \left[2\pi \left(q\tau + \frac{i}{N} \right) + \psi_y \right] \end{cases},$$

où ψ_x et ψ_y sont les mêmes pour tous les satellites adjoints.

4.2.4 Propriétés des formations de type I et II

Dans cette section, nous développons une proposition reprenant les propriétés des formations de type I et II satisfaisant les conditions développées dans la section 4.2.

Proposition 4.2.1 Soit $N = 2, 3, \dots$. Notons $\psi_0 = \frac{q\psi_x - p\psi_y}{\pi}$.

1. Pour une formation de type I, la condition d'équilibre 1 est remplie si, et seulement si, ni p ni q n'est divisible par N .

Pour une formation de type II, la condition d'équilibre 1 est remplie pour tout N .

2. Pour une formation de type I, la condition de non-collision 2 est remplie si le nombre

$$\psi_0 + \frac{p-q}{2}$$

n'est pas un entier et si N est co-premier avec p et q .

3. *Pour une formation de type II, dans le cas où $N \geq 3$, la condition de non-collision 2 est remplie si, et seulement si,*

$$\left(\psi_0 + \frac{p-q}{2} \right) N$$

n'est pas divisible par le plus grand commun diviseur de N et $q-p$. Si $N = 2$, la condition 2 est remplie si, et seulement si, ψ_0 n'est pas un entier.

4. *La courbe de Lissajous décrite par le système (4.4) passe par l'origine $(0,0)$ si et seulement si ψ_0 est un entier.*

Une formation de type I satisfait donc à la condition 3 si et seulement si ψ_0 n'est pas un entier.

Une formation de type II satisfait à la condition 3 si ψ_0 n'est pas de la forme

$$a + 2b \left(\frac{q-p}{N} \right)$$

avec a et b des nombres entiers.

Preuve de la proposition Prouvons successivement les quatre propriétés de la proposition des formations de type I et II. Rappelons que le mouvement d'un satellite adjoint k selon un arrangement uniforme de type I est donné par les positions

$$\begin{cases} x_k &= x_0 \sin \left(2\pi p\tau + \frac{2\pi p}{N}k + \psi_x \right) \\ y_k &= y_0 \sin \left(2\pi q\tau + \frac{2\pi q}{N}k + \psi_y \right) \end{cases},$$

et de type II par les positions

$$\begin{cases} x_k &= x_0 \sin \left(2\pi p\tau + \frac{2\pi}{N}k + \psi_x \right) \\ y_k &= y_0 \sin \left(2\pi q\tau + \frac{2\pi}{N}k + \psi_y \right) \end{cases}.$$

1. Prouvons les deux propriétés suivantes pour les types I et II :

- Type I : BALANCE \Leftrightarrow ni p , ni q n'est divisible par N ,
- Type II : BALANCE $\forall N$.

Rappelons que la condition de balance est formulée comme suit

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k = 0.$$

- Type I : BALANCE \Leftrightarrow Ni p , ni q n'est divisible par N .

⇐ Prouvons que ni p , ni q n'est divisible par $N \Rightarrow$ BALANCE. Commençons tout d'abord par caractériser la notion de "non divisible par N " en terme de sinus et cosinus afin de prouver la condition de balance,

$$\begin{aligned} \text{Ni } p, \text{ ni } q \text{ n'est divisible par } N &\Leftrightarrow \frac{p}{N} \notin \mathbb{N} \text{ et } \frac{q}{N} \notin \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi p}{N} \text{ et } \frac{\pi q}{N} \text{ ne sont pas des multiples de } \pi \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi p}{N}\right) \neq 0 \text{ et } \sin\left(\frac{\pi q}{N}\right) \neq 0. \end{aligned}$$

Ensuite, posons $\beta = \frac{2\pi p}{N}$ et $\alpha = 2\pi p\tau + \psi_x$. Nous avons alors que la composante x du mouvement du satellite k est donnée par $x_k = x_0 \sin(\alpha + k\beta)$. A présent, retrouvons la condition de balance pour la composante x ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N x_k &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k - x_0 + x_N \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_0 \sin(\alpha + k\beta) - x_0 \sin(\alpha) + x_0 \sin(\alpha + N\beta). \end{aligned}$$

Rappelons à présent la formule de la somme de sinus issue de [11],

$$\sum_{k=1}^N \sin(x + ky) = \frac{\sin\left(x + \frac{(n+1)y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \sin\left(\frac{ny}{2}\right),$$

et appliquons là au développement ci-dessus,

$$\sum_{k=1}^N x_k = \frac{\sin\left(\frac{N\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \sin\left(\alpha + \frac{N-1}{2}\beta\right) - x_0 \sin(\alpha) + x_0 \sin(\alpha + N\beta), \quad (4.6)$$

Cette dernière expression n'a du sens que si p n'est pas divisible par N . En effet, dans ce cas $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \neq 0$, ce qui permet d'affirmer que le dénominateur de la fraction est non nul. Remplaçons alors β par $\frac{2\pi p}{N}$ dans (4.6) afin d'obtenir que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N x_k &= \frac{\sin\left(\frac{N}{2} \frac{2\pi p}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi p}{N}\right)} \sin\left(\alpha + \frac{N-1}{2} \frac{2\pi p}{N}\right) - x_0 \sin(\alpha) + x_0 \sin(\alpha + N\beta) \\ &= \frac{\sin(\pi p)}{\sin\left(\frac{\pi p}{N}\right)} \sin\left(\alpha + \frac{N-1}{2} \frac{2\pi p}{N}\right) - x_0 \sin(\alpha) + x_0 \sin(\alpha) \\ &= \frac{0}{\sin\left(\frac{\pi p}{N}\right)} \sin\left(\alpha + \frac{N-1}{2} \frac{2\pi p}{N}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour retrouver la composante y de la condition de balance, il suffit de suivre le même raisonnement en remplaçant x_k par y_k , x_0 par y_0 , p par q et ψ_x par ψ_y .

\Rightarrow Prouvons que BALANCE \Rightarrow Ni p , ni q n'est divisible par N . Pour ce faire, prenons la contraposée et prouvons que soit p , soit q est divisible par $N \Rightarrow$ NO BALANCE. Etant donné que p est divisible par N , on réécrit p comme

$$p = lN \text{ où } l \in \mathbb{N}.$$

Dés lors, la composante en x de la position du $k^{\text{ème}}$ satellite est donné par

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 \sin \left(2\pi p\tau + \frac{2\pi p}{N}k + \psi_x \right) \\ &= x_0 \sin \left(2\pi p\tau + \underbrace{2\pi lk}_{\text{multiple de } 2\pi} + \psi_x \right) \\ &= x_0 \sin (2\pi p\tau + \psi_x). \end{aligned}$$

En repartant de la condition de balance, nous remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_0 \sin (2\pi p\tau + \psi_x) \\ &= x_0 \sin (2\pi p\tau + \psi_x) \neq 0. \end{aligned}$$

Pour la composante y , il suffit de suivre le même raisonnement en posant $q = lN$ où $l \in \mathbb{N}$ afin de conclure que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \neq 0.$$

• Type II : BALANCE $\forall N$. Pour prouver que la condition de balance est respectée pour une formation de type II et pour n'importe quelle valeur de N , repartons de la composante en x de la position d'une formation de type II du $k^{\text{ème}}$ satellite donnée par

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 \sin \left(2\pi p\tau + \frac{2\pi}{N}k + \psi_x \right) \\ &= x_0 \sin \left(\underbrace{2\pi p\tau + \psi_x}_{:=\alpha} + \underbrace{\frac{2\pi}{N}k}_{:=\beta} \right). \end{aligned}$$

Remarquons alors que $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{N}$ n'est pas multiple de π , ce qui implique que $\sin \left(\frac{\pi}{N} \right)$ est non

nul. Soit $N \geq 2$. Reprenons le même raisonnement que pour le type I,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N x_k &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k - x_0 + x_N \\
&= \frac{\sin\left(\frac{N}{2} \frac{2\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)} \sin\left(x + \frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N}\right) - x_0 \sin(\alpha) + x_0 \sin(\alpha + 2\pi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Prouvons la propriété suivante pour le type I

• Type I : NO COLLISION $\Leftrightarrow \psi_0 + \frac{p-q}{2} \notin \mathbb{N}$ et N est premier avec p et q .

Pour ce faire, prenons la contraposée et prouvons que COLLISION \Leftrightarrow soit $\psi_0 + \frac{p-q}{2} \in \mathbb{N}$ soit N est premier avec p ou avec q . Soit $i \neq j$. Ensuite, posons

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{2\pi p}{N} \text{ et } \alpha = 2\pi p\tau + \psi_x \\
\epsilon &= \frac{2\pi q}{N} \text{ et } \delta = 2\pi q\tau + \psi_y.
\end{aligned}$$

La négation de la condition de non collision se traduit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\text{COLLISION} &\Leftrightarrow x_i = x_j \text{ et } y_i = y_j \\
&\Leftrightarrow x_0 \sin(\alpha + \beta i) = x_0 \sin(\alpha + \beta j) \text{ et } y_0 \sin(\delta + \epsilon i) = y_0 \sin(\delta + \epsilon j) \\
&\Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta i) = \sin(\alpha + \beta j) \text{ et } \sin(\delta + \epsilon i) = \sin(\delta + \epsilon j).
\end{aligned}$$

Concernant l'égalité entre deux fonctions sinus, rappelons que

$$\begin{aligned}
\sin a = \sin b &\Leftrightarrow a = b + 2k\pi \\
&\text{ou } a = \pi - b + 2k\pi
\end{aligned}$$

$X_1 \text{ et } X_2 : x_i = x_j \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta i) = \sin(\alpha + \beta j)$

$\forall k \in \mathbb{Z} :$

$1^{er} \text{ cas : } X_1$	$2^{eme} \text{ cas : } X_2$
$x + iy = x + jy + 2k\pi$	$x + iy = \pi - (x + jy) + 2k\pi$
$\Leftrightarrow (i - j) \frac{2\pi p}{N} = 2k\pi$	$\Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi - (i + j)y$
$\Leftrightarrow (i - j) = \frac{kN}{p}$	$\Leftrightarrow 2(2\pi p\tau + \psi_x) = \pi + 2k\pi - (i + j) \frac{2\pi p}{N}$
	$\Leftrightarrow 4\pi p\tau = \pi + 2k\pi - 2\psi_x - (i + j) \frac{2\pi p}{N}$
	$\Leftrightarrow p\tau = \frac{1}{2} + k - \frac{\psi_x}{\pi} - (i + j) \frac{p}{N}$

$$\boxed{Y_1 \text{ et } Y_2 : y_i = y_j \Leftrightarrow \sin(\delta + \epsilon i) = \sin(\delta + \epsilon j)}$$

$\forall l \in \mathbb{Z} :$

$$\begin{array}{ll} 1^{er} \text{ cas : } Y_1 & 2^{eme} \text{ cas : } Y_2 \\ (i - j) = \frac{lN}{q} & q\tau = \frac{1}{2} + l - \frac{\psi_y}{\pi} - (i + j) \frac{q}{N} \end{array}$$

Afin de garantir une collision des satellites adjoints, quatre cas possibles s'offrent à nous.

Ils correspondent aux associations des quatre conditions X_i et Y_i , $\forall i = 1, 2 :$

$$\text{COLLISION} \Leftrightarrow (X_1, Y_1) \text{ ou } (X_2, Y_1) \text{ ou } (X_1, Y_2) \text{ ou } (X_2, Y_2).$$

(a) (X_1, Y_1)

$$\begin{aligned} X_1 \text{ et } Y_1 &\Leftrightarrow kN = p(i - j) \text{ et } lN = q(i - j) \\ &\Leftrightarrow N \text{ n'est pas premier avec } p \text{ et } q \end{aligned}$$

(b) (X_2, Y_1)

$$\begin{aligned} X_2 \text{ et } Y_1 &\Leftrightarrow p\tau = \frac{1}{2} + k - \frac{\psi_x}{\pi} - (i + j) \frac{p}{N} \text{ et } lN = q(i - j) \\ &\Leftrightarrow N \text{ et } q \text{ ne sont pas premiers} \end{aligned}$$

où τ indique le moment où la collision a lieu.

(c) (X_1, Y_2)

$$\begin{aligned} X_1 \text{ et } Y_2 &\Leftrightarrow kN = p(i - j) \text{ et } q\tau = \frac{1}{2} + l - \frac{\psi_y}{\pi} - (i + j) \frac{q}{N} \\ &\Leftrightarrow N \text{ et } p \text{ ne sont pas premiers} \end{aligned}$$

où τ indique le moment où la collision a lieu.

(d) (X_2, Y_2)

$$\begin{aligned}
X_2 \text{ et } Y_2 &\Leftrightarrow \tau_{X_2} = \tau_{Y_2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2p} \left[\frac{1}{2} + k - \frac{\psi_x}{\pi} - (i+j) \frac{p}{N} \right] = \frac{1}{2q} \left[\frac{1}{2} + l - \frac{\psi_y}{\pi} - (i+j) \frac{q}{N} \right] \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} + k - \frac{\psi_x}{\pi} \right] - \frac{i+j}{N} = \frac{1}{q} \left[\frac{1}{2} + l - \frac{\psi_y}{\pi} \right] - \frac{i+j}{N} \\
&\Leftrightarrow q \left[\frac{1}{2} + k - \frac{\psi_x}{\pi} \right] = p \left[\frac{1}{2} + l - \frac{\psi_y}{\pi} \right] \\
&\Leftrightarrow kq - pl = \frac{1}{2}(p-q) + \underbrace{\frac{1}{\pi}(q\psi_x - p\psi_y)}_{=\psi_0} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{kq - pl}_{\in \mathbb{Z}} = \frac{1}{2}(p-q) + \psi_0.
\end{aligned}$$

Il en ressort alors que $\frac{1}{2}(p-q) + \psi_0 \in \mathbb{Z}$.

3. Prouvons les deux propriétés suivantes pour le type II

- Type II : $N \geq 3$, NO COLLISION $\Leftrightarrow (\psi_0 + \frac{p-q}{2}) N$ n'est pas divisible par le PGCD de N et $(q-p)$,
- Type II : $N = 2$, NO COLLISION $\Leftrightarrow \psi_0$ n'est pas un entier.
- Type II : $N \geq 3$, NO COLLISION $\Leftrightarrow (\psi_0 + \frac{p-q}{2}) N$ n'est pas divisible par le PGCD de N et $(q-p)$. Afin de prouver cette première propriété concernant la "non collision" des satellites adjoints, prenons la négation de cette équivalence : COLLISION $\Leftrightarrow (\psi_0 + \frac{p-q}{2}) N$ est divisible par le PGCD de N et $(q-p)$. Soient $i \neq j$ et $N \geq 3$. Ensuite, posons

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{2\pi p}{N} \text{ et } \alpha = 2\pi p\tau + \psi_x \\
\epsilon &= \frac{2\pi q}{N} \text{ et } \delta = 2\pi q\tau + \psi_y.
\end{aligned}$$

La négation de la condition de non collision se traduit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\text{COLLISION} &\Leftrightarrow x_i = x_j \text{ et } y_i = y_j \\
&\Leftrightarrow x_0 \sin(\alpha + \beta i) = x_0 \sin(\alpha + \beta j) \text{ et } y_0 \sin(\delta + \epsilon i) = y_0 \sin(\delta + \epsilon j) \\
&\Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta i) = \sin(\alpha + \beta j) \text{ et } \sin(\delta + \epsilon i) = \sin(\delta + \epsilon j).
\end{aligned}$$

Le raisonnement est alors similaire au point précédent. La seule différence vient de β et ϵ qui ne contiennent plus les facteurs p et q . Nous avons alors que

$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 : x_i = x_j \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta i) = \sin(\alpha + \beta j)}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : 1^{er} \text{ cas} : X_1 \equiv (i - j) = kN$$

$$2^{eme} \text{ cas} : X_2 \equiv p\tau = \frac{1}{2} + k - \frac{\psi_x}{\pi} - \frac{(i + j)}{N}$$

$$\boxed{Y_1 \text{ et } Y_2 : y_i = y_j \Leftrightarrow \sin(\delta + \epsilon i) = \sin(\delta + \epsilon j)}$$

$$\forall l \in \mathbb{Z} : 1^{er} \text{ cas} : Y_1 \equiv (i - j) = lN$$

$$2^{eme} \text{ cas} : Y_2 \equiv q\tau = \frac{1}{2} + l - \frac{\psi_y}{\pi} - \frac{(i + j)}{N}$$

Afin de garantir une collision des satellites adjoints, quatre cas possibles s'offrent à nous.

Ils correspondent aux associations des quatre conditions X_i et Y_i , $\forall i = 1, 2$:

$$\text{COLLISION} \Leftrightarrow (X_1, Y_1) \text{ ou } (X_2, Y_1) \text{ ou } (X_1, Y_2) \text{ ou } (X_2, Y_2).$$

(a) (X_1, Y_1)

$$\begin{aligned} X_1 \text{ et } Y_1 &\Leftrightarrow kN = (i - j) \text{ et } lN = (i - j) \\ &\Leftrightarrow k = \frac{(i - j)}{N} \text{ et } l = \frac{(i - j)}{N}. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse $k \in \mathbb{Z}$. Il est facile de remarquer que $i - j \in [-N, N]$. Il est alors impossible que le terme $\frac{(i - j)}{N} \in \mathbb{Z}$. L'association de ces deux conditions ne comportent donc pas de solution.

(b) (X_1, Y_2) Le raisonnement est similaire que pour les cas (X_1, Y_1) .

(c) (X_2, Y_1) Le raisonnement est similaire que pour les cas (X_1, Y_1) .

(d) (X_2, Y_2)

$$\begin{aligned} X_2 \text{ et } Y_2 &\Leftrightarrow \tau_{X_2} = \tau_{Y_2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2p} \left[\frac{1}{2} + k - \frac{\psi_x}{\pi} - \frac{(i + j)}{N} \right] = \frac{1}{2q} \left[\frac{1}{2} + l - \frac{\psi_y}{\pi} - \frac{(i + j)}{N} \right] \\ &\Leftrightarrow q \left[\frac{1}{2} + k - \frac{\psi_x}{\pi} - \frac{(i + j)}{N} \right] = p \left[\frac{1}{2} + l - \frac{\psi_y}{\pi} - \frac{(i + j)}{N} \right] \\ &\Leftrightarrow qk - pl - \frac{1}{N}(i + j)(q - p) = \frac{1}{2}(p - q) + \underbrace{\frac{1}{\pi}(q\psi_x - p\psi_y)}_{=\psi_0} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{N(qk - pl)}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{(i + j)(q - p)}_{\in \mathbb{Z}} = \left[\frac{1}{2}(p - q) + \psi_0 \right] N. \end{aligned}$$

Il en ressort alors que $\left[\frac{1}{2}(p - q) + \psi_0 \right] N \in \mathbb{Z}$ si $\frac{1}{2}(p - q) + \psi_0$ est divisible par le PGCD de N et $p - q$.

• Type II : $N = 2$, NO COLLISION $\Leftrightarrow \psi_0$ n'est pas un entier. Afin de prouver cette première propriété concernant la "non collision" des satellites adjoints, prenons la négation de cette équivalence : COLLISION $\Leftrightarrow \psi_0$ est un entier. Soient $i \neq j$ et $N = 2$. Supposons

que $i = 1$ et $j = 2$. Nous avons alors que $i + j = 3$. Les conclusions concernant les cas possibles X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont similaires à celle du point précédent. Il en ressort alors de la seule combinaison (X_2, Y_2) comportant une solution que

$$\begin{aligned}
& N(qk - pl) - (i + j)(q - p) = \left[\frac{1}{2}(p - q) + \psi_0 \right] N \\
\Leftrightarrow & 2(qk - pl) - 3(q - p) = \left[\frac{1}{2}(p - q) + \psi_0 \right] 2 \\
\Leftrightarrow & 2(qk - pl) - 3(q - p) = (p - q) + 2\psi_0 \\
\Leftrightarrow & 2(qk - pl) - 4(q - p) = 2\psi_0 \\
\Leftrightarrow & \underbrace{(qk - pl) - (q - p)}_{\in \mathbb{Z}} = \psi_0.
\end{aligned}$$

Nous avons donc que $\psi_0 \in \mathbb{Z}$.

4. Prouvons la propriété suivante : $(0, 0) \in \text{LISSAJOUS} \Leftrightarrow \psi_0 \in \mathbb{Z}$. Conséquence :

- Type I : pas de passage par $(0, 0) \Leftrightarrow \psi_0 \notin \mathbb{Z}$,
- Type II : pas de passage par $(0, 0) \Leftrightarrow \psi_0 \neq a + 2b\frac{q-p}{N}$, où $a, b \in \mathbb{Z}$.

Etudions alors le passage de la courbe de Lissajous par le point $(0, 0)$.

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 \sin(2\pi p\tau + \psi_x) = 0 \\ y_0 \sin(2\pi q\tau + \psi_y) = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} 2\pi p\tau + \psi_x = k\pi \\ 2\pi q\tau + \psi_y = l\pi \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} q(2\pi p\tau + \psi_x) = kq\pi \\ p(2\pi q\tau + \psi_y) = lp\pi \end{cases}.
\end{aligned}$$

En soustrayant les deux équations, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
& 0 + q\psi_x - p\psi_y = (kq - lp)\pi \\
\Leftrightarrow & \underbrace{\frac{q\psi_x - p\psi_y}{\pi}}_{=\psi_0} = \underbrace{kq - lp}_{\in \mathbb{Z}}.
\end{aligned}$$

Il en ressort alors que $\psi_0 \in \mathbb{Z}$. A présent prouvons les deux conséquences sur le type I et II.

- Type I : pas de passage par $(0, 0) \Leftrightarrow \psi_0 \notin \mathbb{Z}$. Prouvons la négation de cette équivalence, ce

qui revient à considérer que : passage par $(0, 0) \Leftrightarrow \psi_0 \in \mathbb{Z}$ Suivons le même raisonnement que pour le point précédent,

$$\begin{cases} q \left(2\pi p\tau + 2\pi p \frac{i}{N} + \psi_x \right) = kq\pi \\ p \left(2\pi q\tau + 2\pi q \frac{i}{N} + \psi_y \right) = lp\pi \end{cases}.$$

En soustrayant les deux équations, nous obtenons que

$$\begin{aligned} 0 + 0 + q\psi_x - p\psi_y &= k\pi q - l\pi p \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{q\psi_x - p\psi_y}{\pi}}_{=\psi_0} &= \underbrace{kq - lp}_{\in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Nous avons donc que $\psi_0 \in \mathbb{Z}$.

• Type II : pas de passage par $(0, 0) \Leftrightarrow \psi_0 \notin \mathbb{Z}$. Prouvons la négation de cette équivalence, ce qui revient à considérer que : passage par $(0, 0) \Leftrightarrow \psi_0 \in \mathbb{Z}$. Suivons le même raisonnement que pour le point précédent,

$$\begin{cases} q \left(2\pi p\tau + 2\pi \frac{i}{N} + \psi_x \right) = kq\pi \\ p \left(2\pi q\tau + 2\pi \frac{i}{N} + \psi_y \right) = lp\pi \end{cases}.$$

En soustrayant les deux équations, nous obtenons que

$$\begin{aligned} 0 + 2\pi \frac{i}{N} (q - p) + \psi_x q - p\psi_y &= \pi (kq - lp) \\ \Leftrightarrow 2\frac{i}{N} (q - p) + \psi_0 &= kq - lp \\ \Leftrightarrow \psi_0 &= \underbrace{(kq - lp)}_{\in \mathbb{Z}} + 2\frac{q - p}{N}i. \end{aligned}$$

Nous avons donc que $\psi_0 \in \mathbb{Z}$.

4.2.5 Simulations numériques

A présent, représentons les formations de type I et II au moyen du logiciel MATLAB en fonction de paramètres variables tels que le nombre de satellites adjoints, p , q et l'angle ψ_0 satisfaisant les conditions (A), (B), (C), (D) énoncées à la section 4.2.1. Le code correspondant est présent en Annexe C.

Tout d'abord, à la FIGURE 4.2, nous représentons les courbes de Lissajous pour une formation des satellites de type II. Pour le choix des paramètres, l'auteur de l'article de référence [9] détaille une série de valeurs admissibles renseignées à la TABLE 4.1. Les deux satellites adjoints se déplacent sur deux courbes de Lissajous différentes. Remarquons qu'en fonction de la valeur de p et q , les deux courbes sont soit symétriques par rapport à l'axe x soit par rapport à l'axe y . Ensuite, à la FIGURE 4.3, nous représentons la formation de type I. Nous remarquons alors que l'ensemble des satellites adjoints se déplacent sur une seule courbe de Lissajous.

$p/q(=\omega_x/\omega_y)$	Nm_S/m_C	N admissibles pour type I
1/2	8	3, 5, 7, ...
1/3	23	2, 4, 5, ...
2/3	11/4	5, 7, 11, ...
1/4	44	3, 5, 7, ...
3/4	4/3	5, 7, 11 ...

TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif des associations de paramètres pour le type I

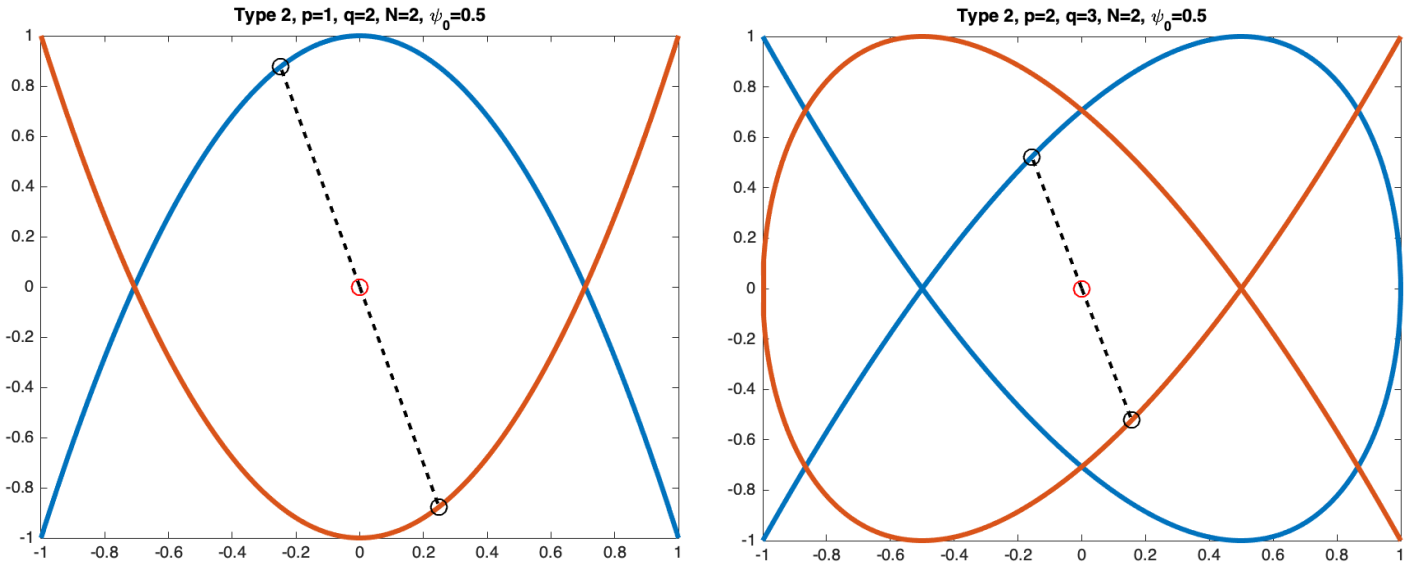


FIGURE 4.2 – Exemple de formation de type II

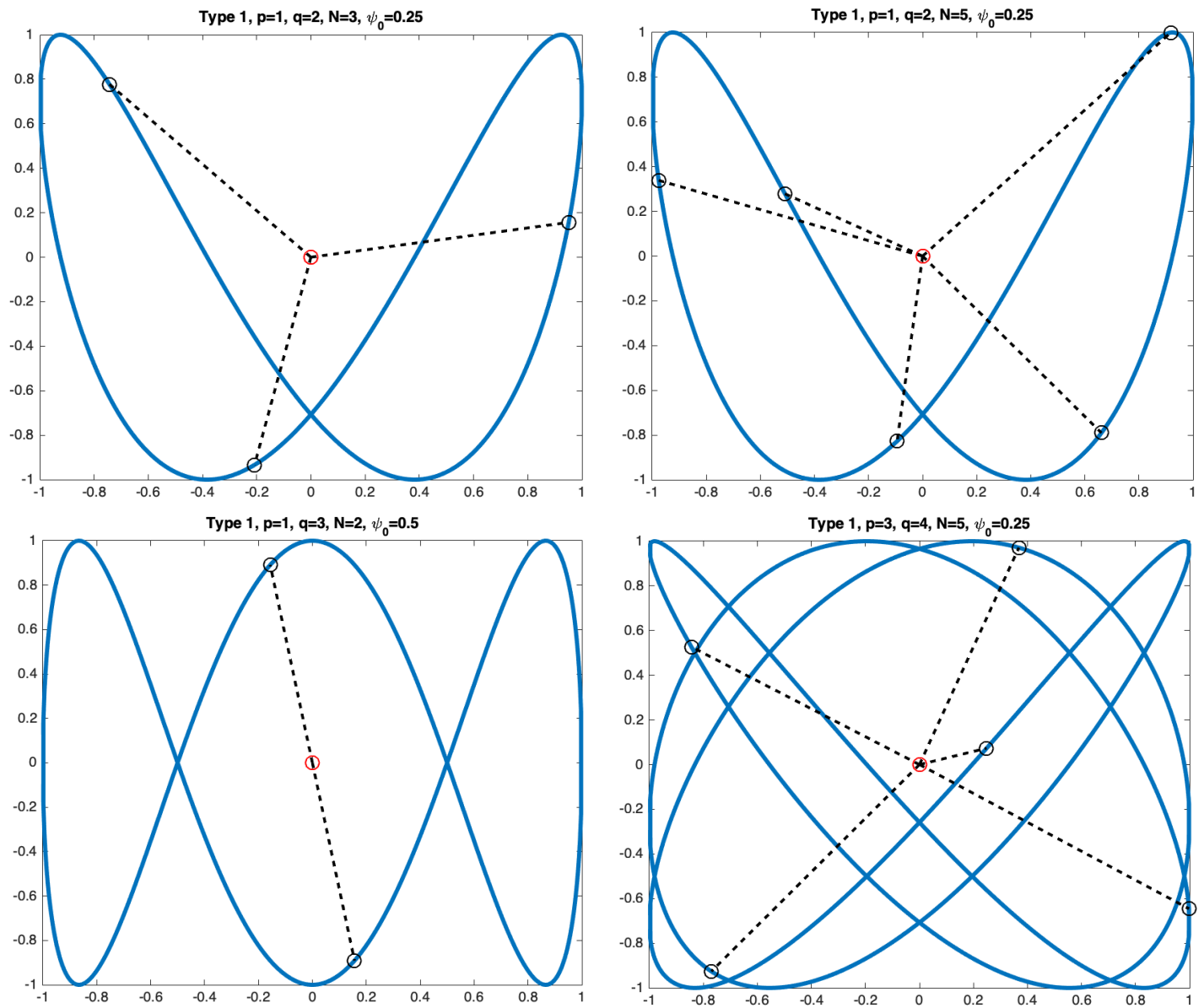


FIGURE 4.3 – Exemple de formation de type I

4.3 Enchevêtrement des câbles

Dans cette section, nous nous intéressons aux éventuels problèmes que de telles formations pourraient engendrer. En effet, disposer des câbles très proches les uns des autres (leur épaisseur ne peut être négligée) et en ne les attachant pas au même endroit sur le satellite principal peut présenter de grands risques. Le mouvement relatif des satellites adjoints étudié dans la section précédente peut alors engendrer des contacts, mais également un enchevêtrement entre les câbles. Ces derniers peuvent s'enrouler les uns autour des autres, alors que d'autres pas, et ces noeuds peuvent se produire dans un sens ou dans l'autre, de façon non symétrique. Les auteurs de l'article [9] ont renoncé à l'étude mathématique de tous les cas possibles, mais donnent une approche intéressante des cas les plus simples, à savoir les enchevêtrements par paires de satellites. Ils distinguent alors trois types d'enchevêtrements, dont deux sont représentés sur les FIGURES 4.4 et 4.5 :

- **pas d'enchevêtrement**
- **enchevêtrement faible** : enchevêtrements pour toutes les paires toutes tordues dans le même sens, par exemple l'ensemble des satellites adjoints effectuent une rotation de 360° et le satellite principal reste fixe
- **enchevêtrement fort** : enchevêtrements pour toutes paires, tordues dans des sens différents ou pas tordues, par exemple un sous-ensemble de satellites adjoints effectuent une rotation de 360° et le satellite principal reste fixe.

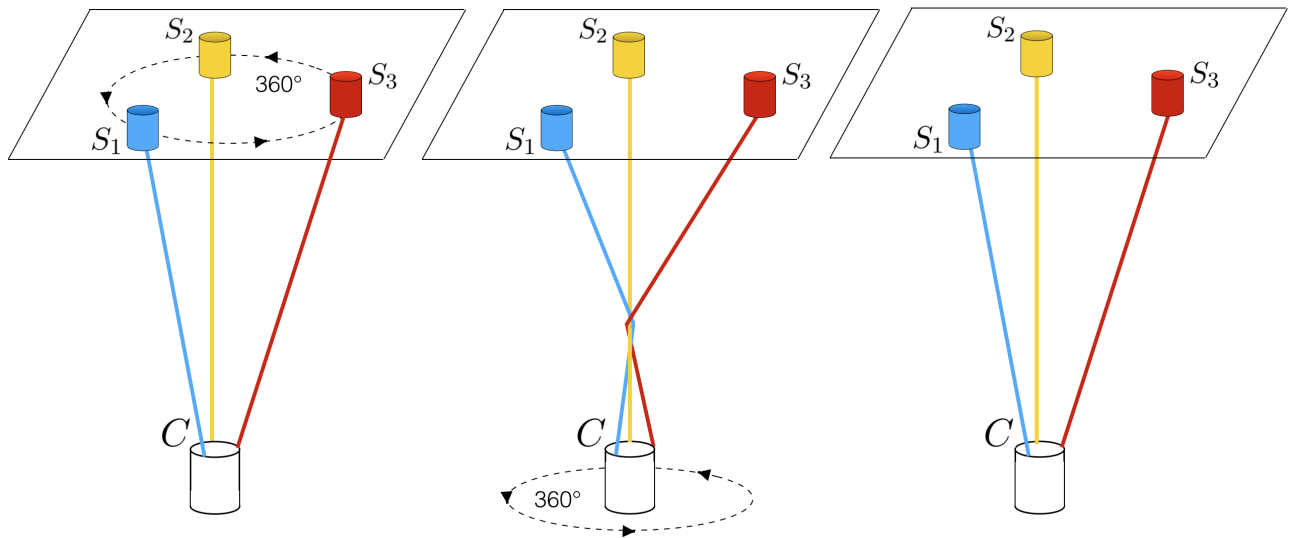


FIGURE 4.4 – Enchevêtrement faible

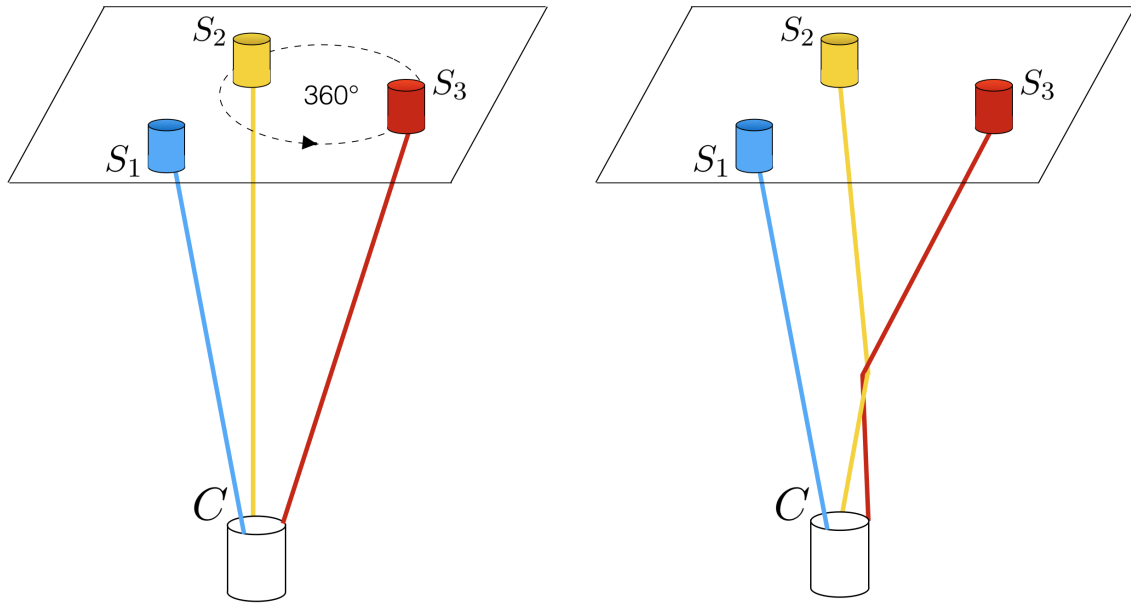


FIGURE 4.5 – Enchevêtrement fort

Là où l'enchevêtrement faible peut simplement être annulé en effectuant une rotation du satellite principal, l'enchevêtrement fort ne peut être résolu par une quelconque rotation du satellite principal. L'intérêt de travailler avec des paires de satellites est de pouvoir relier la notion d'enchevêtrement, faible ou fort, au nombre de rotation autour de l'origine.

Définition 5 Soit une courbe fermée $(x(\tau), y(\tau))_{\tau \in [0,1]}$ qui ne contient pas l'origine et telle que les intersections de la courbe avec l'axe de la coordonnée x soient non dégénérées. Nous avons alors que le nombre ω de rotations sur l'origine peut être écrit comme

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{\tau: y(\tau)=0} \text{sign}(x(\tau)\dot{y}(\tau)).$$

En appliquant cette définition à la différence de position entre deux satellites i et j , n'entrant pas en collision, on obtient alors un outil pour calculer les conditions d'enchevêtrement de deux satellites. Illustrons cette définition au moyen de quatre exemples repris à la FIGURE 4.6.

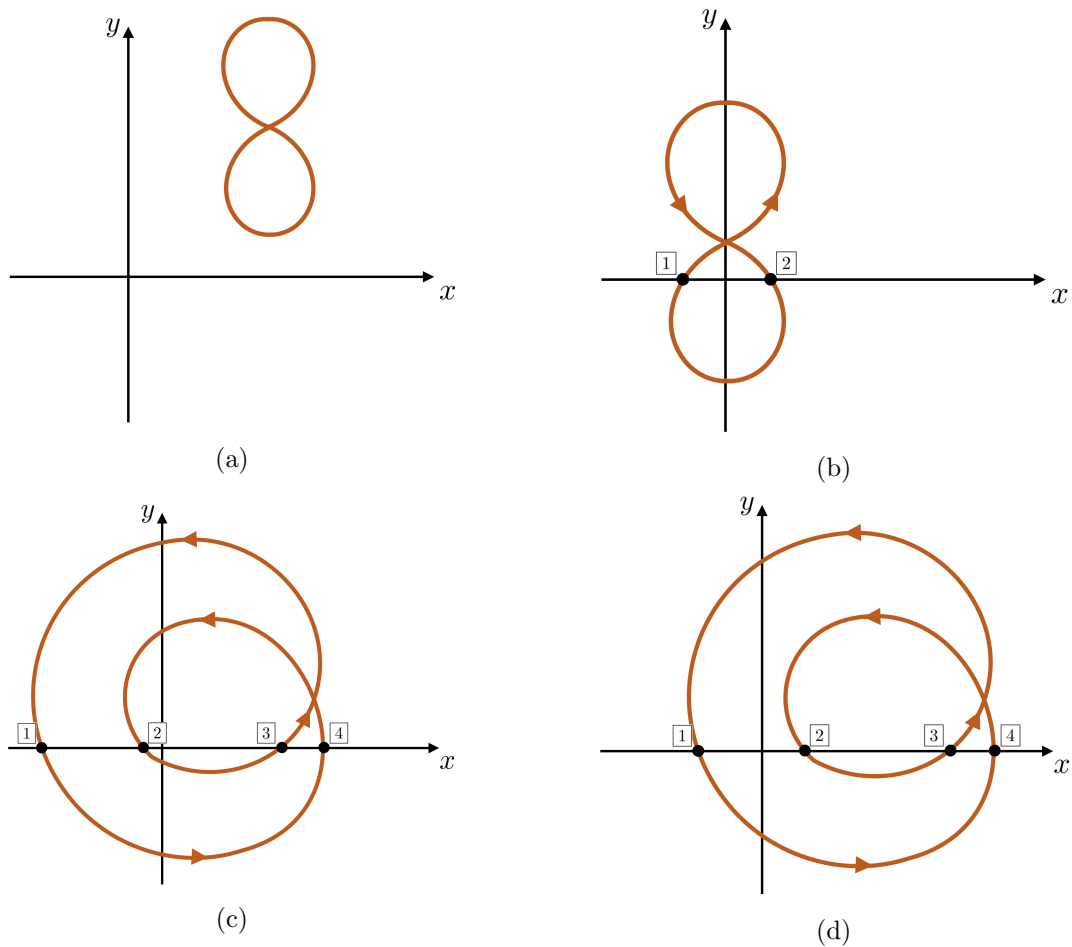


FIGURE 4.6 – Exemples du nombre de rotation ω

1. Le premier cas représenté à la FIGURE 4.6a est une courbe fermée qui n'entoure pas l'origine. Le nombre de rotation est alors donné par

$$\omega = 0.$$

2. Le deuxième cas représenté à la FIGURE 4.6b est une courbe fermée qui entoure l'origine et qui intersecte deux fois l'axe des x . Nous avons alors deux τ tels que $y(\tau) = 0$. Le nombre de rotation est donc calculé comme

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} (\text{sign}(x_1 y_1) + \text{sign}(x_2 y_2)) \\ &= \frac{1}{2} ((-1)(+1) + (-1)(-1)) \\ &= -1. \end{aligned}$$

3. Le troisième cas représenté à la FIGURE 4.6c est une courbe fermée qui entoure l'origine deux fois et qui intersecte quatre fois l'axe des x . Nous avons alors quatre τ tels que

$y(\tau) = 0$. Le nombre de rotation est donc calculé comme

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{2} (\text{sign}(x_1 y_1) + \text{sign}(x_2 y_2) + \text{sign}(x_3 y_3) + \text{sign}(x_4 y_4)) \\ &= \frac{1}{2} ((-1)(-1) + (-1)(-1) + (+1)(+1) + (-1)(+1)) \\ &= 2.\end{aligned}$$

4. Le quatrième cas représenté à la FIGURE 4.6d est une courbe fermée qui entoure l'origine une fois et qui intersecte quatre fois l'axe des x . Nous avons alors quatre τ tels que $y(\tau) = 0$. Le nombre de rotation est donc calculé comme

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{2} (\text{sign}(x_1 y_1) + \text{sign}(x_2 y_2) + \text{sign}(x_3 y_3) + \text{sign}(x_4 y_4)) \\ &= \frac{1}{2} ((-1)(-1) + (+1)(-1) + (+1)(+1) + (-1)(+1)) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Le nombre ω de rotations est donc égal au nombre de fois qu'on entoure l'origine dans une courbe fermée. Il est aussi possible de définir un nombre d'enroulement. Celui-ci correspond au nombre de rotation ω mais dans le cas où la courbe est donnée par une paire de satellites adjoints.

Définition 6 *Pour toute paire (i, j) de satellites adjoints, considérons le nombre d'enroulement ω_{ij} défini comme le nombre de tours que fait le $j^{\text{ème}}$ satellite dans le plan xy sur le $i^{\text{ème}}$ satellite au cours de la période :*

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\tau: y_{ij}(\tau)=0} \text{sign}(x_{ij}(\tau)) \text{sign}(\dot{y}_{ij}(\tau)),$$

où $x_{ij}(\tau) = x_j(\tau) - x_i(\tau)$ et $y_{ij}(\tau) = y_j(\tau) - y_i(\tau)$.

Il est aussi facile de remarquer que $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. Nous sommes à présent en mesure de définir les trois types d'enchevêtrements grâce à ce nombre d'enroulement.

Définition 7 *Une configuration est sans enchevêtrement si, et seulement si,*

$$\omega_{ij} = 0 \quad \forall (i, j).$$

Définition 8 *Un enchevêtrement est dit faible si, et seulement si,*

$$\omega_{ij} = +1 \quad \forall (i, j), \quad \text{ou} \quad \omega_{ij} = -1 \quad \forall (i, j).$$

Définition 9 *Un enchevêtrement est dit fort si, et seulement si, il coexiste des $\omega_{ij} = +1$ et des $\omega_{ij} = -1$ parmi les paires.*

Tentons d'identifier de manière intuitive les éventuels enchevêtrements faibles et forts à partir des simulations de formation de type I et II présentées aux FIGURES 4.3 et 4.2.

- Pour le type I avec $p = 1, q = 1, N = 3$ (graphique en haut à gauche sur la FIGURE 4.3), il existe un enchevêtrement fort en forme de tresse,
- Pour le type I avec $p = 1, q = 3, N = 2$ (graphique en bas à gauche sur la FIGURE 4.3), il existe un enchevêtrement faible,
- Pour le type II avec $p = 1, q = 2$, (ou $p = 2, q = 3$), $N = 2$ (graphique à droite et à gauche sur la FIGURE 4.2), il n'existe pas d'enchevêtrement.

A présent, relierons ces situations à la parité de p et q dans la description des courbes de Lissajous.

Proposition 4.3.1 1. *Considérons une formation de type I ou II se déplaçant sans collision. Si au moins p ou q est pair, alors $\omega_{ij} = 0$ pour toutes les paires. Sinon, $\omega_{ij} = \pm 1$ pour toutes les paires. Par conséquent, si les deux p, q sont impairs, il y a au minimum un enchevêtrement faible.*

2. *En outre, considérons une formation de type I et supposons que les deux p, q soient impairs de sorte que $\omega_{ij} = \pm 1$ sur la propriété 1. Alors les deux valeurs $+1$ et -1 font partie des nombres d'enroulement ω_{ij} si, et seulement si, ni $q - p$, ni $p - q$ n'est divisible par $2N$. En conséquence, si ni $q - p$, $q + p$ n'est divisible par $2N$, alors l'enchevêtrement est non seulement faible, mais aussi fort.*

Preuve de la proposition

1. Supposons une courbe fermée $(x(\tau), y(\tau))_{\tau \in [0,1]}$ qui ne contient pas l'origine et telle que les intersections de la courbe avec l'axe de la coordonnée x soient non dégénérées. Reprenons la définition 6 du nombre d'enroulement,

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\tau: y_{ij}(\tau)=0} \text{sign}(x_{ij}) \text{sign}(\dot{y}_{ij})$$

où

$$\begin{cases} x_{ij}(\tau) &= x_j(\tau) - x_i(\tau) \\ \dot{y}_{ij}(\tau) &= (y_j(\tau) - y_i(\tau)) \end{cases},$$

A présent, considérons séparément les deux types de formations. Type I : Tout d'abord, calculons les coordonnées x_{ij} et y_{ij}

$$\begin{cases} x_{ij}(\tau) &= x_0 \sin \left[2\pi p\tau + \psi_x + \frac{2\pi p}{N}j \right] - x_0 \sin \left[2\pi p\tau + \psi_x + \frac{2\pi p}{N}i \right] \\ y_{ij}(\tau) &= y_0 \sin \left[2\pi q\tau + \psi_y + \frac{2\pi q}{N}j \right] - y_0 \sin \left[2\pi q\tau + \psi_y + \frac{2\pi q}{N}i \right] \end{cases}.$$

Ensuite, posons $\beta = \frac{2\pi p}{N}$, $\alpha = 2\pi p\tau + \psi_x$ et développons x_{ij}

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_0 \sin(\alpha + \beta j) - x_0 \sin(\alpha + \beta i) \\ &= x_0 [\sin(\alpha) \cos(\beta j) - \sin(\alpha) \cos(\beta i) + \cos(\alpha) \sin(\beta j) - \cos(\alpha) \sin(\beta i)] \\ &= x_0 \left[\underbrace{\sin(\alpha) (\cos(\beta j) - \cos(\beta i))}_{(1)} + \cos(\alpha) \underbrace{(\sin(\beta j) - \sin(\beta i))}_{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Appliquons la formule de Simpson à (1) et (2),

$$\begin{aligned} x_{ij} &= 2x_0 \sin\left(\frac{\beta}{2}(j-i)\right) \left[-\sin \alpha \sin\left(\frac{\beta}{2}(i+j)\right) + \cos \alpha \cos\left(\frac{\beta}{2}(i+j)\right) \right] \\ &= 2x_0 \sin\left(\frac{\beta}{2}(j-i)\right) \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}(i+j)\right) / \end{aligned}$$

Pour la composante y_{ij} , en posant $\epsilon = \frac{2\pi q}{N}$, $\delta = 2\pi q\tau + \psi_x$ nous obtenons par un développement similaire

$$y_{ij} = 2y_0 \sin\left(\frac{\epsilon}{2}(j-i)\right) \cos\left(\delta + \frac{\epsilon}{2}(i+j)\right).$$

Dérivons y_{ij} par rapport à τ , et nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{y}_{ij} &= \frac{d}{d\tau} y_{ij} \\ &= -4\pi q y_0 \sin\left(\frac{\epsilon}{2}(j-i)\right) \sin\left(\delta + \frac{\epsilon}{2}(i+j)\right) \end{aligned}$$

A présent, nous pouvons développer le nombre d'enroulement

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{\tau^*: y_{ij}(\tau^*)=0} \text{sign}(x_{ij}(\tau^*)) \text{sign}(\dot{y}_{ij}(\tau^*)) \\ &= \frac{1}{2} \text{sign}(x_0) \text{sign} \left[\sin\left(\frac{\pi p}{N}(j-i)\right) \right] (-1) \text{sign}(y_0) \text{sign} \left[\sin\left(\frac{\pi q}{N}(j-i)\right) \right] \\ &\quad \cdot \sum_{\tau^*} \text{sign} \left[\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}(i+j)\right) \right] \text{sign} \left[\sin\left(\delta + \frac{\epsilon}{2}(i+j)\right) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Intéressons-nous ensuite aux valeurs de τ^* qui annulent y_{ij} .

$$\begin{aligned} \tau^* \text{ tel que } y_{ij} = 0 &\Leftrightarrow \tau^* \text{ tel que } 2y_0 \sin\left(\frac{\epsilon}{2}(j-i)\right) \cos\left(\delta + \frac{\epsilon}{2}(i+j)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tau^* \text{ tel que } \cos\left(\delta + \frac{\epsilon}{2}(i+j)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \delta + \frac{\epsilon}{2}(i+j) = -\frac{\pi}{2} + s\pi, \quad \forall s \in \mathbb{Z} \text{ tel que } s = 1, \dots, 2q. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors remplacer cette valeur dans le sinus apparaissant dans l'équation (4.7)

$$\begin{aligned}\sin\left(\delta + \frac{\epsilon}{2}(i+j)\right) &= \sin\left(-\frac{\pi}{2} + s\pi\right) \\ &= (-1)^s, \quad \forall s = 1, \dots, 2q.\end{aligned}$$

Remplaçons alors cette valeur du sinus dans l'équation (4.7)

$$\begin{aligned}\omega_{ij} &= \frac{1}{2} \text{sign}(x_0.y_0) \text{sign}\left[\sin\left(\frac{\pi p}{N}(j-i)\right)\right] (-1) \text{sign}\left[\left(\sin\frac{\pi q}{N}(j-i)\right)\right] \\ &\quad \cdot \sum_{s=1}^{2q} (-1)^s \text{sign}\left[\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}(i+j)\right)\right]\end{aligned}\tag{4.8}$$

Remarquons que la partie

$$\text{sign}(x_0.y_0) \text{sign}\left[\sin\left(\frac{\pi p}{N}(j-i)\right)\right] (-1) \text{sign}\left[\left(\sin\frac{\pi q}{N}(j-i)\right)\right] = \pm 1.$$

De cette manière-là, nous trouvons que

$$\omega_{ij} = \pm \omega_*.$$

où le nombre d'enroulement ω_* est celui de la courbe de Lissajous

$$\begin{cases} x_*(\tau) &= x_0 \cos(2\pi p\tau + \psi_x) \\ y_*(\tau) &= x_0 \cos(2\pi q\tau + \psi_y) \end{cases}.$$

et est donné par

$$\omega_* = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{2q} (-1)^s \text{sign}\left[\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}(i+j)\right)\right],$$

ou encore

$$\omega_* = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{2q} (-1)^s \text{sign}\left[\cos\left(\frac{\pi ps}{q} + \psi_*\right)\right].\tag{4.9}$$

avec une phase constante ψ_* .

A présent, considérons deux cas possibles ; (a) p et q sont impairs et (b) p ou q est pair (les deux ne peuvent pas être pairs car ils sont premiers entre eux).

(a) Soient p et q impairs. Intéressons-nous à l'équation (4.9) de ω_* . En posant $\theta = \frac{\pi ps}{q}$,

$$\omega_* = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{2q} (-1)^s \text{sign}[\cos(s\theta + \psi_*)],$$

s	Expression du cosinus	Signe du cosinus
1	$\cos(\theta + \psi_*)$	−
2	$\cos(2\theta + \psi_*)$	+
3	$\cos(3\theta + \psi_*)$	−
\vdots	\vdots	\vdots
$2q - 1$	$\cos((2q - 1)\theta + \psi_*)$	−
$2q$	$\cos(2q\theta + \psi_*)$ $= \cos(2\pi p\theta + \psi_*)$	+

TABLE 4.2 – Tableau du signe des cosinus en fonction de s

nous remarquons que l'angle peut prendre $2q$ valeurs en fonction de la valeur de s , où ψ_* est quelconque et situé dans le premier quadrant. Ces différents cas possibles sont repris à la TABLE 4.2.

Il est alors possible de reparamétriser ω_* en fonction de t ,

$$\omega_* = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{2q-1} (-1)^t \text{sign} [\cos(t\theta + \psi_*)].$$

Séparons cette nouvelle expression du nombre d'enroulement en deux,

$$\omega_* = \frac{1}{2} \left[\sum_{t=0}^{q-1} (-1)^t \text{sign} [\cos(t\theta + \psi_*)] + \sum_{t=q}^{2q-1} (-1)^t \text{sign} [\cos(t\theta + \psi_*)] \right]. \quad (4.10)$$

Définissons le changement de variable

$$t' = t - q \Rightarrow t = t' + q$$

et remarquons qu'en l'appliquant sur la deuxième somme de l'équation (4.10), nous obtenons le changement de signe

$$\begin{aligned} (-1)^t &= (-1)^{t'+q} \\ &= (-1)^{t'} (-1)^q \\ &= -(-1)^{t'} \text{ car } q \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors que

$$\omega_* = \frac{1}{2} \left[\sum_{t=0}^{q-1} (-1)^t \text{sign} [\cos(t\theta + \psi_*)] - \sum_{t'=0}^q (-1)^{t'} \text{sign} [\cos(t'\theta + q\theta + \psi_*)] \right].$$

Remarquons que $q\theta = p\pi$ où p est impair, ce qui implique que

$$\cos(t'\theta + p\pi + \psi_*) = -\cos(t'\theta + \psi_*).$$

Le nombre d'enroulement peut alors se réécrire comme

$$\begin{aligned}\omega_* &= \frac{1}{2} \left[\sum_{t=0}^{q-1} (-1)^t \text{sign}[\cos(t\theta + \psi_*)] + \sum_{t'=0}^q (-1)^{t'} \text{sign}[\cos(t'\theta + \psi_*)] \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{q-1} (-1)^t \text{sign}[\cos(t\theta + \psi_*)].\end{aligned}$$

Les angles possibles du cosinus

$$\psi_*, \psi_* + \theta, \dots, \psi_* + (q-1)\theta$$

se situent tous dans une demi circonférence et sont chacun équidistants (voir FIGURE 4.7). Remarquons également que cette valeur de ω_* revient à sommer q fois, où q est impair. Nous avons donc qu'il y aura soit un cosinus positif en plus soit un cosinus négatif en plus. Ce qui nous permet de conclure que

$$\omega_* = \pm 1,$$

et donc que

$$\omega_{ij} = \pm 1.$$

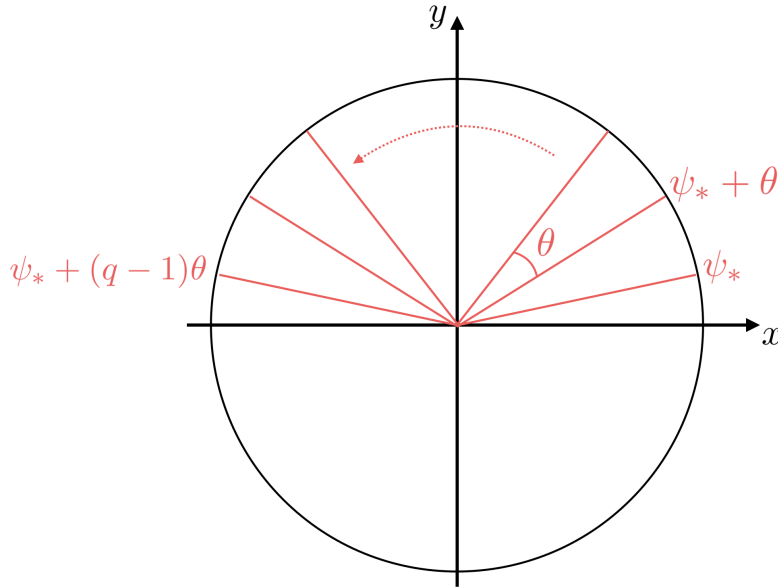


FIGURE 4.7 – Angles équidistants

- (b) Soient p et q et laissons l'un des deux être pair. Sans perdre de généralité, supposons que q soit pair. De cette manière, $q \in 2\mathbb{N}$, ou encore $\frac{q}{2} \in \mathbb{N}$. De plus, p est automatiquement impair car p et q sont premiers entre eux par hypothèse. Il est possible de séparer l'équation (4.9) de ω_* en deux parties, une pour les s pairs et l'autre pour les s impairs afin d'en simplifier l'étude par la suite,

$$\begin{aligned}
\omega_* &= \frac{1}{2} \left[\sum_{t=1}^q \underbrace{(-1)^{2t-1}}_{=-1} \operatorname{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q} (2t-1) + \psi_* \right) \right] + \sum_{t=1}^q \underbrace{(-1)^{2t}}_{=1} \operatorname{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q} (2t) + \psi_* \right) \right] \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[- \underbrace{\sum_{t=1}^q \operatorname{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q} (2t-1) + \psi_* \right) \right]}_{:=S_1} + \underbrace{\sum_{t=1}^q \operatorname{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q} (2t) + \psi_* \right) \right]}_{:=S_2} \right] \\
&= \frac{1}{2} [-S_1 + S_2].
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Evaluons les termes S_1 et S_2 de l'équation (4.11) en les séparant chacun en deux à nouveau. Intéressons nous premièrement à S_1

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{t=1}^q \operatorname{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p (2t-1)}{q} + \psi_* \right) \right] \\
&= \underbrace{\sum_{t=1}^{q/2} \operatorname{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q} (2t-1) + \psi_* \right) \right]}_{:=S_{11}} + \underbrace{\sum_{t=q/2+1}^q \operatorname{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q} (2t-1) + \psi_* \right) \right]}_{:=S_{12}}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Développons le terme S_{12} ,

$$S_{12} = \sum_{t=q/2+1}^q \operatorname{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q} (2t-1) + \psi_* \right) \right],$$

en effectuant le changement de variable

$$t' = t - \frac{q}{2} \quad \text{ou} \quad t = t' + \frac{q}{2}, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \sum_{t=1}^{q-q/2} \operatorname{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q} (2t' + q - 1) + \psi_* \right) \right] \\
&= \sum_{t=1}^{q-q/2} \operatorname{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q} (2t' - 1) + \frac{\pi p q}{q} + \psi_* \right) \right],
\end{aligned}$$

Le cosinus du terme ci-dessus a le même argument que celui de S_{11} , avec seule

différence le fait qu'il y ait un nombre impair de π dans S_{12} . Cela entraîne donc un changement de signe du cosinus. Nous avons donc que

$$S_{12} = -S_{11}.$$

En remplaçant dans l'équation (4.12), nous obtenons que $S_1 = 0$.

Intéressons nous deuxièmement à S_2

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{t=1}^q \text{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p(2t)}{q} + \psi_* \right) \right] \\ &= \underbrace{\sum_{t=1}^{q/2} \text{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q}(2t) + \psi_* \right) \right]}_{:=S_{21}} + \underbrace{\sum_{t=q/2+1}^q \text{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q}(2t) + \psi_* \right) \right]}_{:=S_{22}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Développons le terme S_{22} ,

$$S_{22} = \sum_{t=q/2+1}^q \text{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q}(2t) + \psi_* \right) \right],$$

en effectuant le même changement de variable que celui effectué en (4.13),

$$S_{22} = \sum_{t=1}^{q-q/2} \text{sign} \left[\cos \left(\frac{\pi p}{q} 2t' + \frac{\pi p q}{q} + \psi_* \right) \right],$$

Le cosinus du terme ci-dessus a le même argument que celui de S_{21} , avec seule différence le fait qu'il y ait un nombre impair de π dans S_{22} . Cela entraîne donc un changement de signe du cosinus. Nous avons donc que

$$S_{22} = -S_{21}.$$

En remplaçant dans l'équation (4.14), nous obtenons que $S_2 = 0$.

Il en ressort donc que

$$\omega_* = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0,$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\omega_{ij} = 0.$$

Type II : raisonnement similaire.

2. A partir de la preuve du point (a), prenons le cas d'une type I et de p et q impairs. Nous avons donc que $\omega_{ij} = \pm 1$. Donc si tout les $\omega_{ij} = +1$ ou si tout les $\omega_{ij} = -1$, nous restons dans un enchevêtrement faible. Le cas de l'enchevêtrement fort se produit dans le cas où les $+1$ et -1 apparaissent pour des paires différentes si, et seulement si, ni $q - p$, ni $p + q$ n'est divisible par $2N$. Afin de s'en convaincre, repartons de la définition du nombre d'enroulement

$$w_{i,j} = \omega_* \operatorname{sign}(x_0 y_0) \operatorname{sign}(f_{j-i})$$

où nous avons que

$$f_s = \sin\left(\frac{\pi p s}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi q s}{N}\right) \quad (4.15)$$

- (a) Si q et p sont impairs alors $q - p$ est pair et est divisible par $2N$.

Nous avons donc que $q - p = k \cdot 2N$.

$$\begin{aligned} f_s &= \sin\left(\frac{\pi p s}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi}{N} s (k \cdot 2N + p)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi p s}{N}\right) \sin\left(2\pi s k + \frac{\pi}{N} s p\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi p s}{N}\right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

La conclusion est similaire pour le cas $q + p$. Etant donné que $f_s > 0$, nous aurons que ω_{ij} est toujours de même signe. Dans ce cas-là nous avons un enchevêtrement faible.

A l'inverse, si ni $q - p$, ni $p + q$ n'est divisible par $2N$ alors nous avons un enchevêtrement fort.

4.4 Théorie de perturbation de second ordre

Dans cette section nous allons étudier les effets de non linéarité du mouvement des satellites adjoints le long des courbes de Lissajous. Nous ne prévoyons pas que le mouvement des satellites adjoints le long des courbes de Lissajous soit stable. Ce mouvement est un phénomène subtil qui est fortement affecté par les non-linéarités et qui peut être maintenu sans action de contrôle supplémentaire uniquement à des amplitudes d'oscillations relativement faibles. Nous allons donc développer les effets de non linéarité en déduisant des corrections de second ordre des équations d'évolution dans le cas où $\frac{k}{3\omega_0^2 m_S} \gg 1$ lorsqu'on peut négliger l'extensibilité des attaches et choisir $l_0 = l^*$. Ce cas vient de la condition d'extensibilité (1.37) de la section 1.6. En identifiant la masse relative m_r , il est facile de remarquer que

$$\begin{aligned} k &> \frac{3\omega_0^2 m_C m_S}{m_C + N m_S} \\ \Leftrightarrow k &> 3\omega_0^2 m_r \\ \Leftrightarrow \frac{k}{3\omega_0^2 m_S} &> m_r. \end{aligned}$$

Nous étudions donc le cas où $m_r \gg 1$. Cela revient à considérer que

$$\begin{aligned} \frac{m_C m_S}{m_C + N m_S} &\gg 1 \\ \Leftrightarrow m_C &\gg \frac{m_C + N m_S}{m_S} \\ \Leftrightarrow m_C &\gg \frac{m_C}{m_S} + N \\ \Leftrightarrow m_C - \frac{m_C}{m_S} &\gg N \\ \Leftrightarrow m_C &\gg \frac{N}{1 - \frac{1}{m_S}}. \end{aligned}$$

Remarquons alors que lorsque la masse du satellite adjoint m_S augmente et tend vers l'infini, la condition se résume à imposer que la masse du satellite mère soit beaucoup plus grande que le nombre de satellites adjoints N .

Si nous supposons que le centre de masse du système reste à l'origine, alors la configuration peut être paramétrée par les $2N$ coordonnées $x_i, y_i, i = 1, \dots, N$ des satellites adjoints. Supposons également que les satellites adjoints aient la même masse m_S . Nous obtenons alors le système

$$\begin{aligned} m_C \vec{r}_C + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i &= 0 \\ \Leftrightarrow m_C \vec{r}_C + \left(\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \right) m_S &= 0. \end{aligned}$$

qui peut être décomposé selon les composantes x , y et z

$$\begin{cases} m_C x_C + \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) m_S = 0 \\ m_C y_C + \left(\sum_{i=1}^N y_i \right) m_S = 0 \\ m_C z_C + \left(\sum_{i=1}^N z_i \right) m_S = 0 \end{cases} .$$

Intéressons-nous plus précisément à la composante z_C . Repartons de

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_C - \vec{r}_i\|^2 &= l^2 \\ \Leftrightarrow (z_C - z_i)^2 &= l^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2 \\ \Leftrightarrow (z_C - z_i) &= \sqrt{l^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2} \\ \Leftrightarrow z_C &= z_i + \sqrt{l^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2} \\ \Leftrightarrow m_C z_C &= m_C z_i + m_C \sqrt{l^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2} \end{aligned}$$

Or nous avons que

$$\begin{aligned} m_C z_C &= - \sum_{i=1}^N z_i m_S \\ \Leftrightarrow m_C z_C &\stackrel{(4.16)}{=} - \sum_{i=1}^N \left[z_C - \sqrt{l^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2} \right] m_S \\ \Leftrightarrow z_C (m_C + N m_S) &= m_S \sum_{i=1}^N \sqrt{l^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2} \\ \Leftrightarrow z_C &= \frac{m_S}{m_C + N m_S} \sum_{i=1}^N \sqrt{l^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2} \\ \Leftrightarrow z_C &= \frac{m_r}{m_C} \sum_{i=1}^N l_0 \left[1 - \frac{(x_C - x_i)^2}{l_0^2} - \frac{(y_C - y_i)^2}{l_0^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow z_C &\approx \frac{m_r}{m_C} \sum_{i=1}^N l_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(x_C - x_i)^2}{l_0^2} - \frac{1}{2} \frac{(y_C - y_i)^2}{l_0^2} \right] \\ \Leftrightarrow z_C &\approx \frac{m_r}{m_C} \left\{ N l_0 - \frac{1}{2 l_0} \sum_{i=1}^N \left[(x_i - x_C)^2 - (y_i - y_C)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_C & = & -\frac{m_S}{m_C} \sum_{i=1}^N x_i \\ y_C & = & -\frac{m_S}{m_C} \sum_{i=1}^N y_i \\ z_C & = & \frac{m_r}{m_C} \sum_{i=1}^N \sqrt{l^2 - (x_i - x_C)^2 - (y_i - y_C)^2} \\ & \approx & \frac{m_r}{m_C} \left\{ Nl_0 - \frac{1}{2l_0} \sum_{i=1}^N [(x_i - x_C)^2 - (y_i - y_C)^2] \right\} \end{array} \right.$$

La composante z_i quant à elle, est donnée par

$$\begin{aligned} z_i &= z_c - \sqrt{l^2 - (x_i - x_C)^2 - (y_i - y_C)^2} \\ &\approx \frac{m_r}{m_C} Nl_0 - \frac{m_r}{2m_C l_0} \sum_{k=1}^N [(x_k - x_C)^2 + (y_k - y_C)^2] - l_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(x_C - x_i)^2}{l_0^2} - \frac{1}{2} \frac{(y_C - y_i)^2}{l_0^2} \right] \\ &\approx \frac{m_r}{m_C} Nl_0 - l_0 - \frac{m_r}{2m_C l_0} \sum_{k=1}^N [(x_k - x_C)^2 + (y_k - y_C)^2] + \frac{1}{2l_0} [(x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2] \\ &\approx -\frac{m_r}{m_S} l_0 + \frac{1}{2l_0} \left\{ [(x_i - x_C)^2 - (y_i - y_C)^2] - \frac{m_r}{m_C} \sum_{k=1}^N [(x_k - x_C)^2 - (y_k - y_C)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Remarquons que nous décidons de conserver systématiquement les termes jusqu'au second ordre dans $x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \ddot{x}_i, \ddot{y}_i$.

A présent, exprimons les composantes x et y de la tension agissant sur le $i^{\text{ème}}$ satellite adjoint à travers la composante z . Pour cela, il suffit d'ajouter un terme recentrant la tension de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T_{i,x} & = & \frac{x_i - x_C}{z_i - z_C} T_{i,z} \approx -\frac{x_i - x_C}{l_0} T_{i,z} \\ T_{i,y} & = & \frac{y_i - y_C}{z_i - z_C} T_{i,z} \approx -\frac{y_i - y_C}{l_0} T_{i,z} \end{array} \right.$$

En reprenant les équations du mouvement HCW suivantes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{x}_i & = & 2\omega_0 \dot{z}_i + \frac{T_{i,x}}{m_S} \\ \ddot{y}_i & = & -\omega_0^2 y_i + \frac{T_{i,y}}{m_S} \\ \ddot{z}_i & = & -2\omega_0 \dot{x}_i + 3\omega_0^2 z_i + \frac{T_{i,z}}{m_S} \end{array} \right.,$$

en les appliquant à chaque satellite adjoint S_i , et en isolant le terme $\frac{T_{i,z}}{m_S}$ nous retrouvons la composante en z de la tension

$$\begin{aligned}\frac{T_{i,z}}{m_S} &\approx 2\omega_0\dot{x}_i - 3\omega_0^2\dot{z}_i \\ &\approx 2\omega_0\dot{x}_i - 3\omega_0^2\frac{m_r}{m_S}l_0.\end{aligned}$$

Les deux équations restantes de HCW donnent alors

$$\begin{cases} \ddot{x}_i &\approx 2\omega_0\dot{z}_i - \frac{x_i - x_C}{l_0} \left(2\omega_0\dot{x}_i + 3\omega_0^2\frac{m_r}{m_S}l_0 \right) \\ \ddot{y}_i &\approx -\omega_0^2 y_i - \frac{y_i - y_C}{l_0} \left(2\omega_0\dot{x}_i + 3\omega_0^2\frac{m_r}{m_S}l_0 \right) \end{cases}. \quad (4.17)$$

Ensuite calculons \dot{z}_i en dérivant l'équation (4.16),

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= \frac{1}{l_0} (x_i - x_C) (\dot{x}_i - \dot{x}_C) + \frac{1}{l_0} (y_i - y_C) (\dot{y}_i - \dot{y}_C) \\ &\quad - \frac{m_r}{l_0 m_C} \sum_{k=1}^N [(x_k - x_C) (\dot{x}_k - \dot{x}_C) + (y_k - y_C) (\dot{y}_k - \dot{y}_C)].\end{aligned} \quad (4.18)$$

A présent, repartons tout d'abord de la composante en x du système (4.17) afin d'identifier la notation ω_x introduite à l'équation (4.2).

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i &\approx 2\omega_0\dot{z}_i - \frac{x_i - x_C}{l_0} \left(2\omega_0\dot{x}_i + 3\omega_0^2\frac{m_r}{m_S}l_0 \right) \\ &\approx \frac{2\omega_0}{l_0} \left\{ (x_i - x_C) (\dot{x}_i - \dot{x}_C) + \frac{2\omega_0}{l_0} (y_i - y_C) (\dot{y}_i - \dot{y}_C) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_r}{m_C} \sum_{k=1}^N [(x_k - x_C) (\dot{x}_k - \dot{x}_C) + (y_k - y_C) (\dot{y}_k - \dot{y}_C)] - (x_i - x_C) \dot{x}_i \right\} + 3(x_i - x_C) \omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} l_0 \\ &\stackrel{(4.18)}{=} \frac{2\omega_0}{l_0} \left\{ -\dot{x}_C (x_i - x_C) + (y_i - y_C) (\dot{y}_i - \dot{y}_C) - \frac{m_r}{m_C} \sum_{j=1}^N [(\dot{x}_j - \dot{x}_C) (x_j - x_C) + (\dot{y}_j - \dot{y}_C) (y_j - y_C)] \right\} \\ &\quad - (x_i - x_C) 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S}.\end{aligned}$$

Or nous avons que

$$\begin{aligned}\omega_x = \omega_0 \sqrt{\frac{3m_C}{m_C + Nm_S}} &\Leftrightarrow \omega_x = \omega_0 \sqrt{\frac{3m_r}{m_S}} \\ &\Leftrightarrow \omega_x^2 = 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S}.\end{aligned} \quad (4.19)$$

Ce qui nous permet de trouver que

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i &= \frac{2\omega_0}{l_0} \left\{ -\dot{x}_C (x_i - x_C) + (y_i - y_C) (\dot{y}_i - \dot{y}_C) - \frac{m_r}{m_C} \sum_{j=1}^N \left[(\dot{x}_j - \dot{x}_C) (x_j - x_C) + (\dot{y}_j - \dot{y}_C) (y_j - y_C) \right] \right\} - (x_i - x_C) 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} \\ \Leftrightarrow \ddot{x}_i - \omega_x^2 (x_i - x_C) &= \frac{2\omega_0}{l_0} \left\{ -\dot{x}_C (x_i - x_C) + (y_i - y_C) (\dot{y}_i - \dot{y}_C) - \frac{m_r}{m_C} \sum_{j=1}^N \left[(\dot{x}_j - \dot{x}_C) (x_j - x_C) + (\dot{y}_j - \dot{y}_C) (y_j - y_C) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Ensuite repartons de la composante en y du système (4.17) afin d'identifier la notation ω_y introduite à l'équation (4.1).

$$\begin{aligned}\ddot{y}_i &\approx -\omega_0^2 y_i - \frac{(y_i - y_C)}{l_0} \left(2\omega_0 \dot{x}_i - 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} l_0 \right) \\ \Leftrightarrow \ddot{y}_i &= -\omega_0^2 y_i - 2\omega_0 \dot{x}_i \frac{(y_i - y_C)}{l_0} + 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} (y_i - y_C) \\ \Leftrightarrow \ddot{y}_i - 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} y_C &= -\frac{2\omega_0}{l_0} \dot{x}_i (y_i - y_C) - \omega_0^2 y_i - 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} y_i \\ \Leftrightarrow \ddot{y}_i - 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} y_C &= -\frac{2\omega_0}{l_0} \dot{x}_i (y_i - y_C) - \underbrace{y_i \omega_0^2 \left(1 + 3 \frac{m_r}{m_S} \right)}_{=\omega_y} \\ \Leftrightarrow \ddot{y}_i + \omega_y^2 y_i - 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} y_C &= -\frac{2\omega_0}{l_0} \dot{x}_i (y_i - y_C).\end{aligned}$$

Nous obtenons alors le système d'équations

$$\begin{cases} \ddot{x}_i - \omega_x^2 (x_i - x_C) \approx \frac{2\omega_0}{l_0} \left\{ -\dot{x}_C (x_i - x_C) + (y_i - y_C) (\dot{y}_i - \dot{y}_C) - \frac{m_r}{m_C} \sum_{j=1}^N \left[(\dot{x}_j - \dot{x}_C) (x_j - x_C) + (\dot{y}_j - \dot{y}_C) (y_j - y_C) \right] \right\} \\ \ddot{y}_i + \omega_y^2 y_i - 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} y_C \approx -\frac{2\omega_0}{l_0} \dot{x}_i (y_i - y_C) \end{cases} \quad (4.20)$$

Il nous manque cependant les équations de x_C et y_C . Les équations obtenues dans le système (4.20) peuvent être utilisées pour trouver des corrections non harmoniques à une petite oscillation harmonique particulière. La procédure consiste à substituer l'oscillation harmonique dans le côté droit et à trouver la correction, au premier ordre, en résolvant l'équation linéaire non homogène résultante. Exprimons, tout d'abord, les équations homogènes du système (4.20), tant x_C et y_C font tous deux partie de la partie linéaire du système,

$$\begin{cases} \ddot{x}_i - \omega_x^2 (x_i - x_C) &= 0 \\ \ddot{y}_i + \omega_y^2 y_i - 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} y_C &= 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Repartons de la définition de x_C

$$x_C = -\frac{m_S}{m_r} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (4.22)$$

et dérivons la deux fois par rapport au temps,

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_C &= -\frac{m_S}{m_r} \sum_{i=1}^N \ddot{x}_i \\
&\stackrel{(4.21)}{=} -\frac{m_S}{m_C} \sum_{i=1}^N (-\omega_x^2 x_i + \omega_x^2 x_C) \\
&= \frac{m_S}{m_C} \sum_{i=1}^N \omega_x^2 x_i - \frac{m_S}{m_C} N \omega_x^2 x_C \\
&\stackrel{(4.22)}{=} -\omega_x^2 x_C - \omega_x^2 \frac{m_S}{m_C} N x_C \\
&= -\omega_x^2 \left(1 + \frac{m_S N}{m_C}\right) x_C \\
&= -\frac{\omega_x^2}{m_C} (m_C + N m_S) x_C \\
&\stackrel{(4.19)}{=} -3\omega_0^2 x_C \\
&= -\omega_{Cx}^2 x_C,
\end{aligned}$$

indépendant de x_i et où $\omega_{Cx} = \sqrt{3}\omega_0$. Nous avons alors l'équation caractéristique correspondant à l'équation homogène suivante

$$x_C(t) = A_{Cx} \cos(\omega_{Cx} t + k_{Cx}),$$

où A_{Cx} est un terme totalement arbitraire. Ensuite, repartons de la définition de y_C ,

$$y_C = -\frac{m_S}{m_r} \sum_{i=1}^N y_i, \tag{4.23}$$

et dérivons-la également deux fois par rapport au temps,

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_C &= -\frac{m_S}{m_r} \sum_{i=1}^N \ddot{y}_i \\
&\stackrel{(4.21)}{=} -\frac{m_S}{m_C} \sum_{i=1}^N \left(-\omega_y^2 y_i + 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} y_C \right) \\
&= -\frac{m_S}{m_C} \sum_{i=1}^N y_i - \frac{m_S}{m_C} 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} y_C N \\
&\stackrel{(4.23)}{=} -\omega_y^2 y_C - 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_C} N y_C \\
&= -\left(\omega_y^2 + 3\omega_0^2 \frac{Nm_S}{m_C + Nm_S} \right) y_C \\
&\stackrel{(4.1)}{=} -\left(\omega_0^2 \frac{4m_C + Nm_S}{m_C + Nm_S} + 3\omega_0^2 \frac{Nm_S}{m_C + Nm_S} \right) y_C \\
&= -\omega_0^2 \left(\frac{4m_C + 4Nm_S}{m_C + Nm_S} \right) y_C \\
&= -4\omega_0^2 y_C \\
&= -\omega_{Cy} y_C,
\end{aligned}$$

où $\omega_{Cy} = 2\omega_0$. Nous avons alors l'équation caractéristique correspondant à l'équation homogène suivante

$$y_C(t) = A_{Cy} \cos(2\omega_{Cy}t + k_{Cy}).$$

Nous avons donc que la solution du système est donné par

$$\begin{cases} x_i(t) = A_x \cos(\omega_x + k_x) + B_x \cos(\omega_{Cx}t + k'_{Cx}) \\ y_i(t) = \underbrace{A_y \cos(\omega_y + k_y)}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{B_y \cos(2\omega_{Cy}t + k'_{Cy})}_{\text{solution particulière}} \end{cases}, \quad (4.24)$$

où A_x, A_y, k_x, k_y sont les conditions initiales du système et où les termes linéaires décrivent les oscillations avec les fréquences $\omega_x, \omega_y, \omega_{Cx}, \omega_{Cy}$. Les deux derniers termes correspondent au mouvement du centre de masse des satellites adjoints ou, de manière équivalente, au mouvement du satellite principal. Les termes $B_x, B_y, k'_{Cx}, k'_{Cy}$ sont des constantes particulières fixées, qui satisfont l'équation non homogène en x_i . Nous avons donc calculé une perturbation du deuxième ordre sur les équations \ddot{x}_i et \ddot{y}_i .

A présent, calculons la correction au deuxième ordre en considérant le mouvement d'une formation de type I ou II avec une faible amplitude comme oscillation harmonique de base, que

nous désignons $x_{i,0}$, $y_{i,0}$. Réécrivons le système (4.20), identifions les fonctions F_i et G_i de la manière suivante

$$\begin{cases} \ddot{x}_i - \omega_x^2(x_i - x_C) &= F_i(x_{i,0}, x_{C,0}, y_{i,0}, y_{C,0}, \dot{x}_{i,0}, \dot{x}_{C,0}, \dot{y}_{i,0}, \dot{y}_{C,0}) \\ \ddot{y}_i + \omega_y^2 y_i - 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} y_C &= G_i(x_{i,0}, x_{C,0}, y_{i,0}, y_{C,0}, \dot{x}_{i,0}, \dot{x}_{C,0}, \dot{y}_{i,0}, \dot{y}_{C,0}) \end{cases} \quad (4.25)$$

L'idée est alors de remplacer dans les fonctions F_i et G_i les fonctions par leur solution de l'équation homogène. De plus, en prenant en compte la condition de balance énoncée en (4.5), nous avons que $x_{C,0} = y_{C,0} = 0$. Le système (4.20) devient alors

$$\begin{cases} \ddot{x}_i - \omega_x^2(x_i - x_C) &= F_i(t) \\ &= \frac{2\omega_0}{l_0} \left[y_{i,0} \dot{y}_{i,0} - \frac{m_r}{m_C} \sum_{j=1}^N \left(\dot{x}_{j,0} x_{j,0} + \dot{y}_{j,0} y_{j,0} \right) \right] \\ \ddot{y}_i + \omega_y^2 y_i - 3\omega_0^2 \frac{m_r}{m_S} y_C &= G_i(t) \\ &= -\frac{2\omega_0}{l_0} \dot{x}_{i,0} y_{i,0} \end{cases} \quad (4.26)$$

Bien que la correction du second ordre du mouvement soit évidemment présente pour chaque satellite adjoint, quel que soit le choix des paramètres du système, il est possible de choisir des paramètres de manière à faire disparaître complètement la correction de second ordre du satellite principal. Pour ce faire, regardons ce que valent $\ddot{x}_C(t)$ et $\dot{y}_C(t)$ au deuxième ordre,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_C(t) &= \underbrace{-\omega_{Cx}^2 x_C}_{\text{Equation homogène}} - \underbrace{\frac{m_S}{m_C} \sum_{i=1}^N F_i(t)}_{\text{Correction 2ème ordre}} \\ \Leftrightarrow \ddot{x}_C + -\omega_{Cx}^2 x_C &= -\frac{m_S}{m_C} \frac{2\omega_0}{l_0} \left[\sum_{i=1}^N y_{i,0} \dot{y}_{i,0} - \frac{m_r}{m_C} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\dot{x}_{j,0} x_{j,0} + \dot{y}_{j,0} y_{j,0} \right) \right] \\ \Leftrightarrow \ddot{x}_C + -\omega_{Cx}^2 x_C &= -\frac{m_S}{m_C} \frac{2\omega_0}{l_0} \left[\sum_{i=1}^N y_{i,0} \dot{y}_{i,0} - \frac{m_r}{m_C} N \sum_{j=1}^N \dot{x}_{j,0} x_{j,0} - \frac{m_r}{m_C} N \sum_{j=1}^N \dot{y}_{j,0} y_{j,0} \right] \\ \Leftrightarrow \ddot{x}_C + -\omega_{Cx}^2 x_C &= -\frac{m_S}{m_C} \frac{2\omega_0}{l_0} \left[\sum_{i=1}^N y_{i,0} \dot{y}_{i,0} \frac{m_C}{m_C + Nm_S} - \frac{Nm_S}{m_C + Nm_S} \sum_{j=1}^N \dot{x}_{j,0} x_{j,0} \right] \\ \Leftrightarrow \frac{m_S}{m_C} (\ddot{x}_C + -\omega_{Cx}^2 x_C) &= \frac{2\omega_0}{l_0} \left[\frac{m_C}{m_C + Nm_S} \sum_{i=1}^N y_{i,0} \dot{y}_{i,0} - \frac{Nm_S}{m_C + Nm_S} \sum_{j=1}^N \dot{x}_{j,0} x_{j,0} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_C(t) &= \underbrace{-\omega_{Cy}^2 y_C}_{\text{Equation homogène}} - \underbrace{\frac{m_S}{m_C} \sum_{i=1}^N G_i(t)}_{\text{Correction 2}^{\text{ème}} \text{ordre}} \\
\Leftrightarrow \ddot{y}_C + -\omega_{Cy}^2 y_C &= -\frac{m_S}{m_C} \sum_{i=1}^N \frac{2\omega_0}{l_0} \dot{x}_{i,0} y_{i,0} \\
\Leftrightarrow \frac{m_S}{m_C} (\ddot{y}_C + -\omega_{Cy}^2 y_C) &= -\frac{2\omega_0}{l_0} \sum_{i=1}^N \dot{x}_{i,0} y_{i,0}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors le système suivant

$$\begin{cases} -\frac{m_C}{m_S} (\ddot{x}_C + \omega_{Cx}^2 x_C) \approx \frac{2\omega_0}{l_0} \left(\frac{m_C}{m_C + Nm_S} \sum_{j=1}^N \dot{y}_{j,0} y_{j,0} - \frac{Nm_S}{m_C + Nm_S} \sum_{j=1}^N \dot{x}_{j,0} x_{j,0} \right) \\ -\frac{m_C}{m_S} (\ddot{y}_C + \omega_{Cy}^2 y_C) \approx -\frac{2\omega_0}{l_0} \sum_{j=1}^N \dot{x}_{j,0} y_{j,0} \end{cases} .(4.27)$$

Nous remarquons alors que l'effet du second ordre fait intervenir de nouvelles fréquences. En effet, les termes $\dot{x}_{j,0} x_{j,0}$, $\dot{y}_{j,0} x_{j,0}$ et $\dot{x}_{j,0} y_{j,0}$ dans le côté droit engendrent des fréquences $2\omega_x$, $2\omega_y$, et $\omega_x \pm \omega_y$ respectivement. Cela est dû à la multiplication de cosinus. Notez que le terme Nm_S a tendance à être beaucoup plus grand que m_C pour un système satisfaisant nos hypothèses (voir TABLE 4.1), lorsque N est grand. La plus grande perturbation est alors dans le mouvement de \ddot{x}_C . Autrement dit, le mouvement du satellite principal a tendance à être généralement affecté par des corrections de second ordre bien plus fortes que le mouvement des satellites adjoints. Les y_C , quant à eux, le sont beaucoup moins. Si le nombre de satellites adjoints N augmentent beaucoup, il y aura donc un effet à rajouter sur x_C . Cependant, ici, les contributions de différents j peuvent s'annuler.

Proposition 4.4.1 *Considérons une formation de type I telle que ni $2p$, ni $2q$, ni $q \pm p$ ne soit divisible par N . Alors il n'y a pas de correction de second ordre, ce qui revient à dire que*

$$\sum_{k=1}^N \dot{x}_{k,0}(t) x_{k,0}(t) = \sum_{k=1}^N \dot{y}_{k,0}(t) y_{k,0}(t) = \sum_{k=1}^N \dot{x}_{k,0}(t) y_{k,0}(t) \equiv 0,$$

pour tout t , de sorte que les membres de droite des équations ci-dessus disparaissent à l'identique.

La preuve de cette proposition est élémentaire et donc n'est pas développée dans le cadre de ce mémoire. Les différents jeux de paramètres correspondant à l'hypothèse de la proposition sont $N = 5, p = 1, q = 2$ et $N = 5, p = 3, q = 4$.

Conclusion

Tout au long de l'étude de l'article [9], nous avons construit les équations du mouvement d'un système de satellites adjoints en prenant en compte diverses étapes nécessaires à l'analyse détaillée d'une telle configuration céleste. Tout d'abord en analysant la rigidité des câbles, pour en arriver à une étude approfondie des équilibres intéressants du système, puis en découplant notre système afin d'étudier les mouvements entre satellites principal et adjoints, puis entre adjoints uniquement, ainsi que la stabilité du système. Nous avons ensuite constaté que, sous réserve d'un choix approprié de paramètres de système "en étoile", les satellites adjoints peuvent se déplacer selon les courbes de Lissajous, de sorte que le système reste en mouvement libre (c'est-à-dire qu'aucun carburant n'est consommé en mode de fonctionnement nominal). Le satellite principal est dans un état d'équilibre relatif sur la verticale locale, traversant le système CoM. Notre analyse montre l'existence de relations plutôt non triviales entre les paramètres du système qui, une fois satisfaites, permettent d'obtenir un système bien équilibré, sans collision entre les satellites ou les attaches. Certaines configurations déterminées par le bon choix des paramètres permettent de placer un satellite supplémentaire au centre du système "en étoile", sans collision avec les autres parties du système, ce qui renforce l'idée d'un test grandeur nature dans l'espace. Cependant, le changement de position complexe des satellites adjoints est un défi pour la mise en œuvre technique. En particulier, les câbles doivent être attachés au satellite principal pour ne pas s'entrelacer. L'analyse de l'enchevêtrement de l'attache fournit un autre ensemble de contraintes auquel les paramètres du système doivent satisfaire. La totalité de l'étude de cet article et la rédaction de ce mémoire ont entraîné de longues investigations au travers de divers articles. L'entièreté des calculs effectués par l'auteur de l'article de référence ont été reconstruits, en essayant d'apporter un raisonnement mieux expliqué, tant les justifications nous semblaient, quelques fois, peu précises. Il est intéressant de remarquer que la modélisation du système câblé a été possible grâce à des outils mathématiques très simples et en particulier la seconde loi de Newton. Peu de forces supplémentaires ont été ajoutées. Les résultats théoriques et numériques et leur comparaison permettent de confirmer une certaine cohérence dans la conception des lois du mouvement. Bien que nous sommes conscients que l'éventuel envoi d'un système de satellites multi-câblés nécessite une étude numérique bien plus poussée, nous pouvons avancer l'idée qu'une telle configuration spatiale est tout à fait envisageable.

Bibliographie

- [1] Alary, D., Andreev, K., Sidorenko, V., Tourneur, C., Yarotsky, P., *Dynamics of Multi-Tethered Pyramidal Satellite Formation*, Acta Astronaut., p. 222–232, 2015.
- [2] Avanzini, G., Fedi, M., *Effects of eccentricity of the reference orbit on multi-tethered satellite formations*, Acta Astronaut., p. 338–350, 2014.
- [3] Bekey, I., *Tethers open new space options*, Astronaut. Aeronaut., 23-40, 1983.
- [4] Celletti, A., Sidorenko, V.V., *Some properties of dumbbell satellite attitude dynamics*, Celest. Mech. Dyn. Astr., p. 105-126, 2008.
- [5] Clohessy, W.H., Wiltshire, R.S., *Terminal guidance system for satellite rendezvous*, Journal of the Aerospace Sciences, Vol. 27, No. 9, p. 653-658, 1960.
- [6] Pizarro-Chong, A., Misra, A.K., *Dynamics of multi-tethered satellite formations containing a parent body*, Acta Astronaut., p. 1188–1202, 2008.
- [7] Sidorenko, V.V., Celletti, A., *A “spring-mass” model of tethered satellite systems : properties of planar periodic motions.*, Celest. Mech. Dyn. Astr., p. 209-231, 2010.
- [8] Wong, B., Misra, A., *Planar dynamics of variable length multi-tethered spacecraft near collinear Lagrangian points*, Acta Astronaut., 1178–1187, 2008.
- [9] Yarotsky, D., Sidorenko, V., Pritykin, D., *Three-dimensional multi-tethered satellite formation with the elements moving along Lissajous curves*, Springer Science et Business Media Dordrecht, 309-332, 2016.
- [10] Zhao, J., Cai, Z., *Nonlinear dynamics and simulation of multi-tethered satellite formations in Halo orbits*, Acta Astronaut., p. 673-681, 2008.
- [11] Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., *Table of integrals, series, and products - Corrected and enlarged edition*, Academic Press, INC., Sect. 1.34, 1980.
- [12] Lemaître, A., *Algèbre et géométrie analytique*, notes de cours, Université de Namur, Belgique, p. 49, 2018
- [13] Noyelles, B., *Dynamique Céleste*, notes de cours, Université de Namur, Belgique, 2018.
- [14] Libert, A-S., *Introduction à la rédaction mathématique*, notes de cours, Université de Namur, Belgique, 2018.

- [15] Lemaître, A., *Mécanique du point et du solide*, notes de cours, Université de Namur, Belgique, 2017.
- [16] Carletti, T., *Equations différentielles ordinaires*, notes de cours, Université de Namur, Belgique, 2015.
- [17] Carletti, T., *Théorie qualitative des systèmes dynamiques*, notes de cours, Université de Namur, Belgique, 2018.
- [18] Ferréol, R., *Courbes de Lissajous*, <https://www.mathcurve.com/courbes2d/lissajous/lissajous.shtml>, consulté le 10 mars 2019.
- [19] *Polynôme de Hurwitz*, https://fr.wikipedia.org/wiki/Polynme_de_Hurwitz, consulté le 16 mars 2019.

Annexe A

Propriétés de la dynamique d'attitude du satellite "dumbbell"

Lors de la première lecture de l'article de référence [9], il nous était venu l'idée d'utiliser une méthode de modélisation similaire à celle de l'article [4] et de l'article [7] (voir Annexe B). Finalement, nous avons décidé de suivre une autre voie, mais nous présentons tout de même les deux articles dans ces deux annexes.

Cette annexe se base intégralement sur l'article [4]. Le but de ce chapitre n'est pas de re-développer les calculs effectués dans l'article mais de présenter une autre manière de modéliser le mouvement de deux masses en orbite autour de la Terre. Dans ce chapitre, nous développerons la modélisation du satellite "dumbbell" au moyen de la description lagrangienne en précisant les expressions de l'énergie potentielle et cinétique. Le satellite "dumbbell", traduit littéralement par satellite "haltère", est composé de deux masses connectées par un câble non extensible, dont la masse sera négligée dans la modélisation suivante. Celui-ci se meut autour d'une planète à une distance plus grande que celle qui sépare les deux masses reliées. Cette hypothèse nous permet alors de traiter le problème comme celui d'un mouvement keplerien non perturbé. Dans cette approche, nous considérerons le mouvement elliptique et non circulaire du satellite "dumbbell" autour de la planète. La modélisation en 3 dimensions de ce système peut être représentée par la FIGURE A.1. Nous notons alors

- d la distance entre les masses m_1 et m_2 , considérée comme constante,
- O le centre de masse des masses m_1 et m_2 ,
- P la planète autour de laquelle le satellite "dumbbell" tourne,
- R la distance entre O et P ,
- ν l'anomalie vraie (angle formé du vecteur PO et de la ligne du péricentre.

Le centre de masse O n'est pas nécessairement situé à équidistance entre m_1 et m_2 , les deux

masses pouvant être différentes. Il est cependant en mouvement le long d'une orbite képlérienne avec une excentricité e et un demi-grand axe a . Afin de modéliser au mieux le mouvement du satellite "haltère", introduisons les deux angles θ et ψ (voir FIGURE A.2), où

- θ est l'angle formé par l'axe z et la projection du câble sur le plan orbital,
- ψ est l'angle formé par la direction du câble avec le plan Oxz .

En mécanique céleste, plusieurs outils mathématiques permettent d'obtenir les équations généralisées des angles. Dans cette section, nous choisirons d'utiliser la notion de Lagrangien, afin de calculer les équations hamiltoniennes.

En notant $E = E_1 + E_2$ l'énergie potentielle des deux masses m_1 et m_2 , et $T = T_1 + T_2$ l'énergie cinétique, définissons le Lagrangien comme suit

$$L = T - E.$$

Tout d'abord, exprimons l'énergie potentielle comme

$$E_i = \frac{-Km_i}{|\mathcal{R} + r_i|}, \quad i = 1, 2,$$

où r_i est le vecteur radial de m_i , $\mathcal{R} = R e_z$ est le vecteur radial du centre de masse O et $K = \frac{G}{M_T}$ le paramètre gravitationnel.

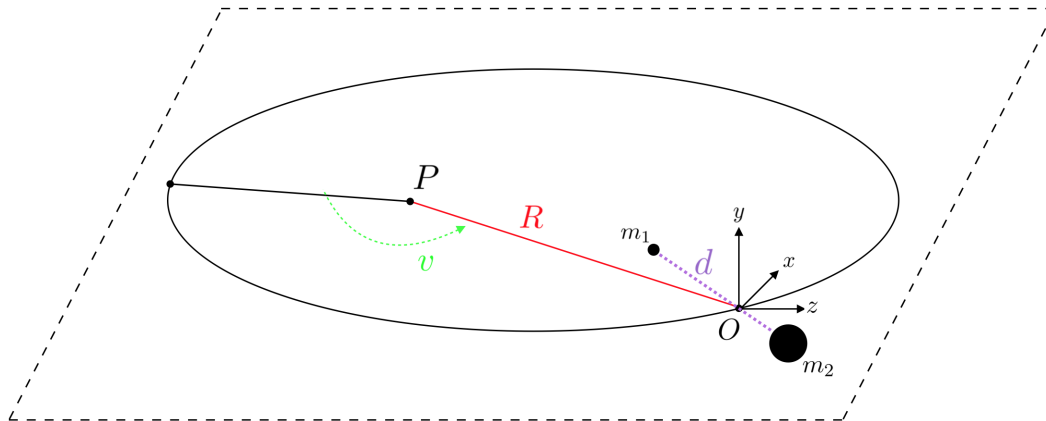


FIGURE A.1 – Cadre du référentiel orbital O_{xyz}

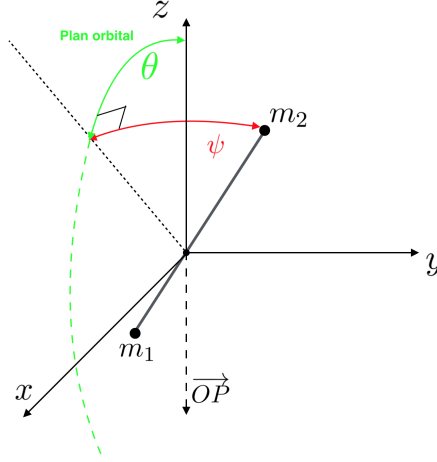


FIGURE A.2 – Angles utilisés pour définir la position du satellite "dumbbell"

Les vecteurs radiaux sont définis de la manière suivante :

$$r_1 = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \\ -\cos \psi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$r_2 = \frac{m_1 d}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} \cos \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \\ \cos \psi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Réécrivons à présent l'expression de l'énergie potentielle comme

$$E = E_0 + E_r,$$

où E_0 est indépendant de l'orientation du satellite. En définissant la masse réduite

$$m_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

nous pouvons exprimer E_0 et E_r comme suit

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{-K}{R} \left((m_1 + m_2) - \frac{m_0 d^2}{2R^3} \right) \\ E_r &= -\frac{3K m_0 d^2}{2R^3} (\vec{e}_z, \vec{e}_d)^2 + \dots \end{aligned}$$

où (\vec{e}_z, \vec{e}_d) est le produit scalaire entre les deux vecteurs. Nous négligerons les termes d'ordre supérieurs comme dans bon nombre d'études de dynamique d'attitude.

L'expression de l'énergie potentielle peut être exprimée de manière plus complète, en notant ω_0

la fréquence orbitale, grâce à l'introduction de la formule

$$\frac{K}{R^3} = \omega_0^2 \left(\frac{a}{R} \right) = \frac{n^2(1 + e \cos \nu)}{(1 - e^2)^3}. \quad (\text{A.3})$$

Ensuite, développons l'énergie cinétique comme

$$T_i = \frac{m_i V_i^2}{2}, \quad i = 1, 2,$$

où $\vec{V}_i = \vec{V}_0 + \vec{v}_i$ avec \vec{V}_0 la vitesse du centre de masse du satellite et \vec{v}_i la vitesse par rapport au centre de masse.

Notons Ω la vitesse angulaire associée au mouvement orbital, c'est-à-dire $\vec{\Omega} = \mathcal{V}(\nu)\vec{e}_y$, avec

$$\mathcal{V}(\nu) = \frac{\omega_0(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}.$$

A présent, exprimons la vitesse v_i comme

$$v_i = \vec{\Omega} \times \vec{r}_i + \frac{d^* \vec{r}_i}{dt}.$$

où la notation $\frac{d^*}{dt}$ désigne la dérivée dans le cadre de référence orbital $Oxyz$ non inertiel. Dérivons les expressions (A.1) et (A.2) et obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d^* \vec{r}_1}{dt} &= \frac{m_2 d}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta - \dot{\theta} \cos \psi \cos \theta \\ \dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{\psi} \sin \psi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta \end{pmatrix} \\ \frac{d^* \vec{r}_2}{dt} &= \frac{m_1 d}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \cos \theta \\ -\dot{\psi} \cos \psi \\ -\dot{\psi} \sin \psi \cos \theta - \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De la même manière que pour l'énergie potentielle, réécrivons l'expression de l'énergie cinétique comme $T = T_0 + T_r$, où

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{(m_1 + m_2)V_0^2}{2} \\ T_r &= \frac{m_0 d^2}{2} \left(\dot{\psi}^2 + (\dot{\theta} + \Omega)^2 \cos^2 \psi \right). \end{aligned}$$

Remarquons pour finir que les termes T_0 et E_0 ne dépendent pas des variables d'attitude. Lors de l'expression des équations hamiltoniennes, ces deux termes seront constants par rapport à θ et ψ et s'annuleront donc. Le Lagrangien peut alors se réécrire comme suit :

$$L = T_r - E_r.$$

Annexe B

Un modèle "masse-ressort" des systèmes de satellites câblés

Cette annexe se base intégralement sur l'article [7]. Le but de ce chapitre n'est pas de re-développer les calculs effectués dans l'article mais de poursuivre la modélisation de deux masses en orbite autour de la Terre en ajoutant un câble les reliant l'une à l'autre. Dans ce chapitre, nous développerons le modèle "masse-ressort" au moyen de la description lagrangienne en précisant les expressions de l'énergie potentielle et cinétique. Le modèle "masse-ressort" des systèmes de satellites câblés se base sur celui du satellite "dumbbell" en omettant cependant l'hypothèse que la distance entre les masses est constante : le câble reliant m_1 et m_2 est extensible et peut donc être considéré comme un ressort. La modélisation du problème ainsi que les différentes notations seront similaires à celles utilisées dans l'annexe A (voir FIGURE B.1). Afin de caractériser la

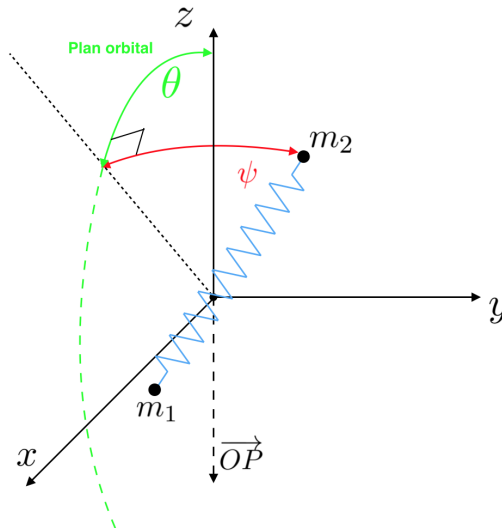


FIGURE B.1 – Angles utilisés pour le modèle "masse-ressort" des systèmes de satellites câblés

distance entre les deux masses, introduisons l'extension relative du câble

$$\xi = \frac{d}{d_0} - 1,$$

où d_0 est la longueur du câble non déformé. Prenons pour hypothèse que le câble est tendu et droit, ce qui peut être caractérisé par le fait que $\xi > 0$ et $d > d_0$.

A nouveau, calculons le Lagrangien du modèle

$$L = T - E.$$

Tout d'abord, intéressons-nous à l'énergie potentielle E . Celle-ci est composée de l'énergie potentielle dans le champ gravitationnel, notée E^g , à laquelle nous rajoutons l'énergie potentielle élastique notée E^e . Nous avons alors que

$$E = E^e + E^g,$$

avec

$$E^e = \frac{cd_0^2\xi^2}{2},$$

où c est la rigidité du câble. L'énergie potentielle dans le champ gravitationnel est donnée par

$$E^g = E_1^g + E_2^g,$$

avec

$$E_i^g = \frac{-Km_i}{|\mathcal{R} + r_i^e|}, \quad i = 1, 2,$$

où r_i^e est le vecteur radial de m_i , $\mathcal{R} = Re_z$ est le vecteur radial du centre de masse O et K le paramètre gravitationnel.

Les vecteurs radiaux sont définis sur base de (A.1) et (A.2) comme étant

$$r_1^e = (1 + \xi)r_1, \tag{B.1}$$

$$r_2^e = (1 + \xi)r_2. \tag{B.2}$$

Réduisons l'expression de l'énergie potentielle comme

$$E^g = E_0^g + E_r^g,$$

où E_0^g est indépendant de l'orientation du satellite. En définissant la masse réduite

$$m_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

nous pouvons exprimer E_0^g et E_r^g comme suit

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{-K}{R}(m_1 + m_2) \\ E_r &= \frac{Km_0d^2}{2R^3}(1 + \xi)^2(e_z, e_d)^2 + \dots \end{aligned}$$

où nous négligerons les termes d'ordres supérieurs.

L'expression de l'énergie potentielle peut être complétée, en notant ω_0 la fréquence orbitale, grâce à la formule (A.3). Ensuite, remarquons que l'énergie cinétique se définit de la même manière que pour le satellite "dumbbell". La seule différence provient de l'expression $\frac{d^* \vec{r}_i^e}{dt}$ de la vitesse relative. Dérivons les expressions (B.1) et (B.2) et obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d^* \vec{r}_1^e}{dt} &= \frac{m_2 d}{m_1 + m_2} \left[\dot{\xi} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \theta \\ -\sin \psi & \cos \theta \end{pmatrix} + (1 + \xi) \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \psi & \sin \theta - \dot{\theta} \cos \psi & \cos \theta \\ \dot{\psi} \cos \psi & & \\ \dot{\psi} \sin \psi & \cos \theta + \dot{\theta} \cos \psi & \sin \theta \end{pmatrix} \right] \\ \frac{d^* \vec{r}_2^e}{dt} &= \frac{m_1 d}{m_1 + m_2} \left[\dot{\xi} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \theta \\ -\sin \psi & \cos \theta \end{pmatrix} + (1 + \xi) \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \sin \psi & \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi & \cos \theta \\ -\dot{\psi} \cos \psi & & \\ -\dot{\psi} \sin \psi & \cos \theta - \dot{\theta} \cos \psi & \sin \theta \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

De la même manière que pour l'énergie potentielle, réduisons l'expression de l'énergie cinétique comme

$$T = T_0 + T_r,$$

où

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{(m_1 + m_2)V_0^2}{2} \\ T_r &= \frac{m_0 d^2}{2} \left[\dot{\xi}^2 + (1 + \xi)^2 \left(\dot{\psi}^2 + (\dot{\theta} + \Omega)^2 \cos^2 \psi \right) \right]. \end{aligned}$$

$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ où x_i est le $i^{\text{ème}}$ échantillon et n est le nombre d'échantillon

Annexe C

Codes Matlab

Dans cette annexe se trouvent les différents codes implémentés en MATLAB. Ces codes nous ont permis d'illustrer le mouvement des satellites adjoints le long des courbes de Lissajous. Les différents paramètres envisageables ont été repris parmi ceux proposés par [9].

```
clear all
```

```
close all
```

```
%—— Conditions initiales ——%
```

```
p=1;
```

```
q=2;
```

```
N=3;
```

```
if (p==1)
```

```
    if (q==2)
```

```
        if (N==3)
```

```
            phi0=1/4;
```

```
            aphix=0.6;
```

```
            type=1;
```

```
        elseif (N==5)
```

```
            phi0=1/4;
```

```
            aphix=0.77;
```

```
            type=1;
```

```
        elseif (N==2)
```

```
            type=2;
```

```
            phi0=1/2;
```

```
            aphix=0.92;
```

```

        end
    elseif (q==3)
        phi0=1/2;
        aphix=0.05;
        type=1;
    end
elseif (p==2)
    phi0=1/2;
    aphix=0.95;
    type=2;
elseif (p==3)
    phi0=1/4;
    aphix=-1.12;
    type=1;
end

x_0=1;
y_0=1;
w0=1;

%—— Discretisation du temps——%

t=100;
T = 0:.01:t*pi;
len = size(T);
longueur = len(2);

%—— Initialisation de l'angle en x et y——%

phi_x = pi*aphix;
phi_y = (q*phi_x-pi*phi0)/p;

%—— Initialisation des vecteurs x et y——%

x = zeros(N,longueur);
y = zeros(N,longueur);

%—— Calcul de la frequence et periode——%

```

```

w = (w0*p)/sqrt(q^2-p^2);
TL = (2*pi*p)/w;
tau = T/TL;

%—— Calcul des courbes de Lissajous ——%

if type==1
    for i=1:N
        x(i,:) = x_0*sin(2*pi*p*(tau+i/N)+phi_x);
        y(i,:) = y_0*sin(2*pi*q*(tau+i/N)+phi_y);
    end
elseif type==2
    for i=1:N
        x(i,:) = x_0*sin(2*pi*(p*tau+i/N)+phi_x);
        y(i,:) = y_0*sin(2*pi*(q*tau+i/N)+phi_y);
    end
end

%—— Plot des courbes de Lissajous ——%

a=0;
b=0;
figure

plot(x(1,:),y(1,:), 'linewidth',3)
if (type==2)
    hold on
    plot(x(2,:),y(2,:), 'linewidth',3)
end
hold on
plot(x(1,1),y(1,1), 'o', 'MarkerSize',10, 'color', 'k')
plot(x(2,1),y(2,1), 'o', 'MarkerSize',10, 'color', 'k')
if (N==3||N==5)
    plot(x(3,1),y(3,1), 'o', 'MarkerSize',10, 'color', 'k')
    if (N==5)
        plot(x(4,1),y(4,1), 'o', 'MarkerSize',10, 'color', 'k')
    end
end

```



```

        plot(x(5,1),y(5,1),'o','MarkerSize',10,'color','k')
    end
end

plot(a,b,'o','MarkerSize',10,'color','r')
plot([a x(1,1)],[b y(1,1)],'—','linewidth',2,'color','k');
plot([a x(2,1)],[b y(2,1)],'—','linewidth',2,'color','k');
if (N==3||N==5)
    plot([a x(3,1)],[b y(3,1)],'—','linewidth',2,'color','k');
    if (N==5)
        plot([a x(4,1)],[b y(4,1)],'—','linewidth',2,'color','k');
        plot([a x(5,1)],[b y(5,1)],'—','linewidth',2,'color','k');
    end
end
end

title(['Type_',num2str(type),' ','_p=',num2str(p),' ','_q=',num2str(q),' ',
N=',num2str(N),' ','_\psi_0=',num2str(phi0)])
saveas(gcf,'1.png')

```